Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

Retrakte und Retraktionen von Begriffsverbänden

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von: Felix Kästner

Tag der Einreichung: 15.06.2010

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Ganter

Inhaltsverzeichnis

Autor: Felix Kästner, retraktionen@fpunktk.de

1 Einleitung

Diese Arbeit behandelt das Thema „Retrakte und Retraktionen von Begriffsverbänden“. Hauptanliegen ist es, das Konzept der Retraktionen auf Begriffsverbände zu übertragen und anzuwenden. Retraktionen werden dabei als idempotente Verbandsendomorphismen definiert und Retrakte sind die Bilder von Retraktionen.

Obwohl das Konzept der Retraktionen bekannt ist, konnten keine Quellen gefunden werden, die sich mit Retraktionen oder auch nur Endomorphismen von Verbänden auseinandersetzen. Daher soll die vorliegende Arbeit als Grundlage für weiterführende Forschung dienen und dazu sowohl in das Thema einführen (besonders in Bezug auf die formale Begriffsanalyse) als auch erste Ergebnisse liefern, mit denen weitergearbeitet werden kann.

Begriffsverbände wurden deshalb betrachtet, weil die formale Begriffsanalyse einige interessante und sehr hilfreiche Werkzeuge zur Verfügung stellt, mit deren Hilfe sich die Retraktionen gut beschreiben lassen. Das Interesse an Retrakten gründet sich darauf, dass sie vergleichsweise spezielle Unterstrukturen von Verbänden liefern.

Grundlegende Fragen zum Thema waren: Sind Retraktionen eine seltene Erscheinung bestimmter Verbände, oder gibt es im Allgemeinen eher viele davon? Kann ein einfacher Algorithmus zum Bestimmen aller Retraktionen eines Begriffsverbandes angegeben werden? Kann man Retraktionen auch am Kontext erkennen?

Das Grundlagenkapitel wiederholt dazu alle hier benötigten Ergebnisse aus dem Gebiet der formalen Begriffsanalyse. Einige davon werden ausführlich vorgestellt, um dem Leser ein gutes Gefühl und Verständnis zu vermitteln. Wichtig sind dabei unter anderem die eineindeutige Beziehung zwischen Kontexten und Begriffsverbänden, denn viele Fragen zu Verbänden werden mit Hilfe von Kontexten beantwortet. Außerdem spielen die verträglichen Teilkontexte eine entscheidende Rolle. Kenntnisse über allgemeine mathematische Grundbegriffe aus dem Gebiet der Mengen und Abbildungen werden vorausgesetzt.

Im darauf folgenden Kapitel werden Retrakte und Retraktionen definiert, wobei auf die bei Verbänden übliche Unterscheidung zwischen Verbands- und Vollhomomorphismen eingegangen wird. Anschließend werden Algorithmen zum Finden aller Retraktionen eines Begriffsverbandes hergeleitet. Mit deren Hilfe ist es möglich für kleinere Verbände relativ schnell einen Überblick über die Retraktionen und Retrakte zu bekommen. Weiterhin wird angegeben, wie man Retrakte bereits am Kontext ihres Begriffsverbandes erkennen kann. Dieses Ergebnis wird auch einen Zusammenhang zwischen verträglichen Teilkontexten und abgeschlossenen Relationen herstellen. Danach werden weitere Eigenschaften der Retraktionen angegeben. Dabei wird unter anderem darauf eingegangen, wie viele Retraktionen ein Verband hat und es wird untersucht, ob sich Retraktionen auf zusammengesetzte Kontexte bzw. deren Verbände übertragen lassen.

Am Ende des dritten Kapitels werden die Begriffsverbände einiger Skalen auf Retraktionen untersucht. Da Retraktionen in gewisser Hinsicht als Rundungen oder Projektionen auf Verbänden verstanden werden können, wird in diesem Zusammenhang eine erste Anwendung besprochen.

Zum Schluss werden Anregungen für weiterführende Forschung gegeben.

2 Grundlagen

Das gesamte Grundlagenkapitel orientiert sich stark an [GW], dem Standardwerk über formale Begriffsanalyse, und fasst für diese Arbeit relevante Definitionen und Ergebnisse zusammen.

Leser, die mit der formalen Begriffsanalyse vertraut sind, können dieses Kapitel überfliegen.

2.1 Geordnete Mengen und Verbände

Definition 2.1 (vgl. Definition 1 in [GW]). Eine **(binäre) Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times N$ dieser beiden Mengen, besteht also aus Paaren (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Für $(m, n) \in R$ wird oft mRn geschrieben, was an die bekannte Schreibweise der Verhältniszeichen angelehnt ist. △

Da sich das Wort binär meist aus dem Zusammenhang erschließt, wird es oft weggelassen. Falls die Mengen M und N gleich sind, spricht man von einer Relation *auf* der Menge M. Eine solche binäre Relation ist die Ordnungsrelation:

Definition 2.2 (vgl. Definition 2 in [GW]). Eine **Ordnungsrelation** R auf einer Menge M ist eine Relation, die für alle $x, y, z \in M$ die drei Bedingungen

$$xRx \qquad \text{(Reflexivität)}$$

$$(\, xRy \quad \text{und} \quad yRz\,) \implies xRz \qquad \text{(Transitivität)}$$

$$(\, xRy \quad \text{und} \quad yRx\,) \implies x = y \qquad \text{(Antisymmetrie)}$$

erfüllt. Das Paar (M, R) nennt man dann eine **(halb-)geordnete Menge**. △

Im Folgenden wird für Ordnungsrelationen oft das Symbol $\leq$ verwendet. Wie allgemein üblich gilt dann $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt. Für die grafische Darstellung von geordneten Mengen (und auch Verbänden) in Diagrammen wird noch die Nachbarschaftsrelation benötigt:

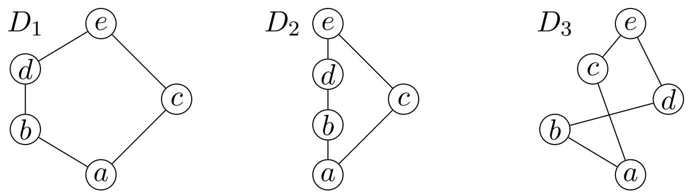
Definition 2.3 (Definition 3 in [GW]). Man nennt a einen **unteren Nachbarn** von b, falls $a < b$ ist und kein Element c existiert mit $a < c < b$. Es ist dann b ein **oberer Nachbar** von a und man schreibt $a \prec b$. △

Jede endliche geordnete Menge $(M, \leq)$ lässt sich damit grafisch durch ein **Liniendiagramm** darstellen. Dabei werden alle Elemente von M durch Punkte oder kleine Kreise symbolisiert. Haben zwei Elemente $x, y \in M$ die Eigenschaft $x \prec y$, so wird der Punkt für x unterhalb des Punktes für y gezeichnet und sie werden durch eine Linie verbunden. Aus einem solchen Diagramm kann man die Ordnungsrelation wieder ablesen. Es gilt $x \leq y$ wenn man von x in einem aufsteigenden Linienzug y erreichen kann oder $x = y$ gilt. Die grafische Darstellung ist ein vielbenutztes Werkzeug der formalen Begriffsanalyse und sollte daher dem Leser bestens vertraut sein.

Beispiel 1. Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ mit der Ordnungsrelation

$$\leq \; = \{(x, x) \mid x \in M\} \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}.$$

Für die Nachbarschaftsrelation gilt dann $\prec \; = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (d, e)\}$. Daraus kann man beispielsweise folgende Liniendiagramme aufstellen:



Obwohl die drei Diagramme recht verschieden aussehen, repräsentieren sie doch alle die geordnete Menge $(M, \leq)$ und die Ordnungsrelation lässt sich eindeutig ablesen. Man sieht, dass es bei nicht verbundenen Knoten wie c und d keine Rolle spielt, welcher von beiden über dem anderen liegt. ⊙

Definition 2.4 (vgl. Definition 9 in [GW]). Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Eine untere Schranke von A ist ein Element $s \in M$ mit $s \leq a$ für alle $a \in A$. Falls es in der Menge aller unteren Schranken von A ein größtes Element gibt, so nennt man dies das **Infimum** von A und bezeichnet es mit $\inf A$ oder $\bigwedge A$. Dual wird eine obere Schranke von A definiert. Das **Supremum** von A ist dann die kleinste obere Schranke von A und wird mit $\sup A$ oder $\bigvee A$ bezeichnet. Für zweielementige Teilmengen $A = \{a, b\}$ existieren die Schreibweisen $a \wedge b := \inf\{a, b\}$ und $a \vee b := \sup\{a, b\}$. △

Definition 2.5 (vgl. Definition 10 in [GW])**.** Eine geordnete Menge $\mathbf{V} := (V, \leq)$ heißt **Verband**, wenn für alle $x, y \in V$ gilt $x \wedge y \in V$ und $x \vee y \in V$. $\mathbf{V}$ heißt **vollständiger Verband**, wenn für alle Teilmengen $X \subseteq V$ gilt

$$\bigwedge X \in V \text{ und } \bigvee X \in V.$$

Jeder vollständige Verband $(V, \leq)$ hat mit $\mathbf{0_V} := \bigwedge V = \bigvee \emptyset$ ein kleinstes Element, welches **Nullelement** genannt wird und mit $\mathbf{1_V} := \bigvee V = \bigwedge \emptyset$ ein größtes, das **Einselement**. $\triangle$

Definition 2.6 (vgl. Definition 11 in [GW])**.** Ein Element v eines vollständigen Verbandes $(V, \leq)$ wird **$\bigvee$-irreduzibel** genannt, wenn $v \neq \bigvee\{x \in V \mid x < v\}$ ist, also wenn v nicht als Supremum echt kleinerer Elemente dargestellt werden kann. Das Element v wird **$\bigwedge$-irreduzibel** genannt, falls $v \neq \bigwedge\{x \in V \mid v < x\}$, was bedeutet, dass v nicht als Infimum echt größerer Elemente darstellbar ist. Die Menge aller $\bigvee$-irreduziblen Elemente eines Verbandes $\mathbf{V}$ wird mit $J(\mathbf{V})$ bezeichnet, die aller $\bigwedge$-irreduziblen mit $M(\mathbf{V})$. $\triangle$

Da wir uns hier oft mit endlichen Mengen und Verbänden beschäftigen wollen, ist folgender Satz hilfreich:

Hilfssatz 2.7. *Jeder nichtleere endliche Verband ist vollständig.*

2.2 Kontexte und Begriffsverbände

In diesem Abschnitt werden die elementaren Grundbegriffe der formalen Begriffsanalyse eingeführt.

Definition 2.8 (vgl. Definition 18 in [GW])**.** Ein **formaler Kontext** $\mathbb{K} := (G, M, I)$ besteht aus den Mengen G, deren Elemente **Gegenstände** genannt werden, und M, deren Elemente **Merkmale** genannt werden, sowie einer (binären) Relation $I \subseteq G \times M$, welche **Inzidenzrelation** genannt wird. Falls $(g, m) \in I$ gilt, schreibt man kurz gIm und sagt „der Gegenstand g hat das Merkmal m“. Sind G und M endlich, so spricht man auch von einem endlichen Kontext. $\triangle$

Um Gegenstände mit gleichen Merkmalen zusammenfassen zu können und daraus formale Strukturen, also Begriffe, bilden zu können, benötigen wir sogenannte Ableitungsoperatoren für Gegenstände und Merkmale.

Definition 2.9 (vgl. Definition 19 in [GW])**.** Es sei (G, M, I) ein Kontext, $A \subseteq G$ eine Menge von Gegenständen und $B \subseteq M$ eine Menge von Merkmalen. Dann definieren wir mit

$$\begin{aligned} A' &:= \{m \in M \mid gIm \text{ für alle } g \in A\} \quad \text{und} \\ B' &:= \{g \in G \mid gIm \text{ für alle } m \in B\} \end{aligned}$$

die **Ableitungen** der Mengen A bzw. B. △

Sind die abzuleitenden Mengen einelementig, so wird statt $\{a\}'$ abkürzend a' geschrieben. Es ist ebenfalls üblich A^I statt A' zu schreiben, um bei Mehrdeutigkeiten klar zu machen, welche Inzidenzrelation zum Ableiten genutzt wird.

Definition 2.10 (vgl. Definitionen 20 und 22 in [GW])**.** Ein **formaler Begriff** eines Kontextes (G, M, I) ist ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ sowie $A' = B$ und $B' = A$. Dabei wird A **Umfang** und B **Inhalt** des Begriffes genannt. Die Menge aller Begriffe des Kontextes wird mit $\mathfrak{B}(G, M, I)$ bezeichnet. Für Gegenstände $g \in G$ und Merkmale $m \in M$ spricht man vom **Gegenstandsbegriff** $\gamma g := (g'', g')$ und vom **Merkmalbegriff** $\mu m := (m', m'')$. △

Das Wort *formal* soll jeweils betonen, dass es sich um die mathematische Abstraktion von Begriff und Kontext handelt. Es wird im Folgenden oft weggelassen, um den Lesefluss nicht zu stören.

Für Ableitungen von Gegenstands- und Merkmalsmengen gibt es einige „Rechenregeln", die nun kurz zusammengefasst werden.

Hilfssatz 2.11 (vgl. Hilfssätze 10 und 11 in [GW])**.** *Ist (G, M, I) ein Kontext und sind $A, A_1, A_2 \subseteq G$ Mengen von Gegenständen und $B, B_1, B_2 \subseteq M$ Mengen von Merkmalen, so gilt*

$$\begin{aligned} &A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \subseteq A_1' && B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2' \subseteq B_1' \\ &A \subseteq A'' && B \subseteq B'' \\ &A' = A''' && B' = B''' \\ &(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2' && (B_1 \cup B_2)' = B_1' \cap B_2' \end{aligned}$$

Sei $J \subseteq I$ eine weitere Relation, so gilt $A^J \subseteq A^I$.

Beweis. Hier soll nur $J \subseteq I \Rightarrow A^J \subseteq A^I$ bewiesen werden. Die anderen Beweise finden sich in [GW]. Sei $A \subseteq G$ und $A^* := \{(a, b) \mid a \in A, b \in M\}$.

$$\begin{aligned}
&A^J = \{m \in M \mid gJm \text{ für alle } g \in A\} = \{m \mid (g, m) \in A^* \cap J\} \\
&A^I = \{m \mid (g, m) \in A^* \cap I\} \\
&J \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad A^* \cap J \;\subseteq\; A^* \cap I \quad \Longrightarrow \quad A^J \subseteq A^I
\end{aligned}$$ ■

Für die Einführung von Begriffsverbänden ist es nötig, eine Ordnung innerhalb der Begriffe zur Verfügung zu haben.

Definition 2.12. Ein Begriff (A_1, B_1) heißt Unterbegriff eines Begriffes (A_2, B_2), wenn $A_1 \subseteq A_2$ oder gleichbedeutend dazu $B_2 \subseteq B_1$ gilt. Eine Schreibweise dafür ist $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Die Menge $\mathfrak{B}(G, M, I)$ versehen mit dieser Ordnungsrelation wird **Begriffsverband** genannt und mit $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ bezeichnet. △

Satz 2.13 (Satz 3 in [GW], Hauptsatz über Begriffsverbände, erster Teil)**.** *Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist ein vollständiger Verband, in dem Infimum und Supremum folgendermaßen beschrieben sind:*

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'' \right)$$
$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'', \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

Wie zu einem gegebenen Kontext alle Begriffe und damit der Begriffsverband ermittelt werden, wird in [GW] im zweiten Kapitel beschrieben. Diese Verfahren sind hier nicht von besonderem Interesse, es soll lediglich festgehalten werden, dass es dafür schnelle und leicht programmierbare Algorithmen gibt. Es ist ebenfalls leicht möglich, den Kontext aus allen seinen Begriffen zu rekonstruieren. Problematisch ist aber, dass zu nicht isomorphen Kontexten isomorphe Begriffsverbände gehören können[1].

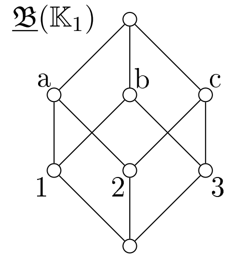
[1] Zwei Kontexte (G_1, M_1, I_1) und (G_2, M_2, I_2) sind **isomorph**, wenn es bijektive Abbildungen $\alpha : G_1 \to G_2$ und $\beta : M_1 \to M_2$ gibt mit $gI_1m \Leftrightarrow (\alpha g)I_2(\beta m)$ für alle $g \in G_1$, $m \in M_1$. Zwei Verbände sind isomorph, wenn es zwischen ihnen einen bijektiven Vollhomomorphismus (siehe Definition 2.17) gibt.

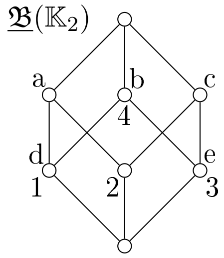
Beispiel 2. Gegeben sind die beiden Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$:

$\mathbb{K}_1$	a	b	c
1	×	×	
2	×		×
3		×	×

$\mathbb{K}_2$	a	b	c	d	e
1	×	×		×	
2	×		×		
3		×	×		×
4		×			

Diese können nicht isomorph sein, da ihre Gegenstands- und Merkmalsmengen nicht gleich groß sind. Zu ihnen gehören die folgenden Begriffsverbände, die offensichtlich isomorph sind:





Man sieht in diesem Beispiel auch, dass die Gegenstände der Begriffe jeweils etwas unterhalb der entsprechenden Kreise geschrieben werden und die Merkmale oberhalb. Zur besseren Lesbarkeit werden die Mengenklammern fast immer weggelassen. Weiterhin wird die reduzierte Bezeichnung benutzt, welche in [GW, Seite 23] erklärt wird. ⊙

Eineindeutige Beziehungen zwischen Kontext und Begriffsverband erhält man, wenn der Kontext weitere Eigenschaften hat.

Definition 2.14 (vgl. Definitionen 23 und 24 in [GW])**.** Ein Kontext (G, M, I) heißt **bereinigt**, wenn

$$g' = h' \implies g = h \qquad \text{und} \qquad m' = n' \implies m = n$$

für alle $g, h \in G$ und alle $m, n \in M$ gilt. Ein bereinigter Kontext heißt **reduziert**, wenn jeder Gegenstandsbegriff $\bigvee$-irreduzibel und jeder Merkmalbegriff $\bigwedge$-irreduzibel ist. △

In [GW, Kapitel 1.2] werden Verfahren zum Bereinigen und Reduzieren eines Kontextes angegeben.

Hilfssatz 2.15 (Hilfssatz 12 in [GW]). *Zu jedem endlichen*[2] *Verband* $\mathbf{V} = (V, \leq)$ *gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten Kontext* $\mathbb{K}(\mathbf{V})$ *mit* $\mathbf{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}(\mathbf{V}))$, *nämlich*

$$\mathbb{K}(\mathbf{V}) := (J(\mathbf{V}), M(\mathbf{V}), \leq).$$

Dieser wird ***Standardkontext*** *des Verbandes* $\mathbf{V}$ *genannt.*

Bemerkung 2.16. Damit erhalten wir eine eineindeutige Beziehung zwischen reduzierten Kontexten und doppelt fundierten (speziell endlichen) (Begriffs-)Verbänden: Jeder Kontext lässt sich durch Bereinigen und Reduzieren auf eine eindeutige Form bringen, wodurch sich sein Begriffsverband aber nicht ändert. Zu einem doppelt fundierten Verband kann man eindeutig den Standardkontext angeben. $\ast$

2.3 Homomorphismen

In diesem Kapitel sollen Homomorphismen zwischen Verbänden definiert werden. Dabei können leicht unterschiedliche Wege eingeschlagen werden, die jedoch deutlich voneinander unterschieden werden müssen: In [GW] werden *Voll*homomorphismen definiert, welche ein Spezialfall der in [GL] und [DP] betrachteten *Verbands*homomorphismen sind.

Definition 2.17 (vgl. Definiton 13 in [GW] und 2.16 in [DP]). Seien $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ Verbände. Man nennt eine Abbildung $h : V \to W$ einen **Verbandshomomorphismus**, wenn sie für alle $x, y \in V$ die Bedingungen

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) \quad \text{und} \quad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$$

erfüllt. Sind $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ *vollständige* Verbände und erfüllt h auch die stärkere Bedingung

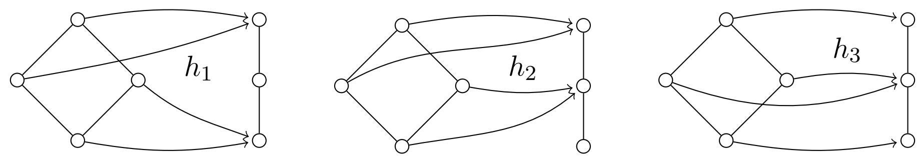
$$\forall\, T \subseteq V: \quad h\Big(\bigwedge T\Big) = \bigwedge h(T) \quad \text{und} \quad h\Big(\bigvee T\Big) = \bigvee h(T), \tag{2.1}$$

so heißt h ein vollständiger Verbandshomomorphismus oder kurz **Vollhomomorphismus**. Bedingung (2.1) muss insbesondere auch für $T = \emptyset$ gelten, was zur Folge hat, dass $h(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$ und $h(\mathbf{1_V}) = \mathbf{1_W}$ gelten müssen. Man sagt dazu auch, dass die Abbildung h **0-1-erhaltend** sein muss.

Ein **Verbands- bzw. Vollendomorphismus** ist ein Verbands- bzw. Vollhomomorphismus, der einen Verband auf sich selbst abbildet (Selbstabbildung). Ein **Verbands- bzw. Vollisomorphismus** ist ein bijektiver Verbands- bzw. Vollhomomorphismus. $\triangle$

[2] Der Hilfssatz gilt auch im doppelt fundierten Fall. Siehe dazu Definition 2.27.

Beispiel 3. Wir betrachten die folgenden Abbildungen:



Die Abbildung h_1 ist sowohl ein Verbands- als auch ein Vollhomomorphismus. Bei h_2 handelt es sich nur um einen Verbandshomomorphismus, denn h_2 ist nicht **0**-**1**-erhaltend. Da weder das Supremum noch das Infimum der beiden mittleren Elemente durch h_3 erhalten wird, kann h_3 weder ein Voll- noch ein Verbandshomomorphismus sein.

Im hier vorliegenden endlichen Fall ist der (einzige) Unterschied zwischen Verbandshomomorphismus und Vollhomomorphismus, dass letzterer **0**-**1**-erhaltend sein *muss.* ⊙

Wenn im Folgenden nur Homomorphismus steht ist oft trotzdem Verbands- oder Vollhomomorphismus gemeint. Die genaue Bedeutung ergibt sich dann aus dem Zusammenhang oder ist nicht von entscheidender Wichtigkeit.

Definition 2.18 (vgl. Definition 12 in [GW] und 2.13 in [DP])**.** Eine Teilmenge U eines Verbandes $\mathbf{V}$ heißt **Unterverband**, wenn für alle $a, b \in U$ gilt, dass $a \wedge b \in U$ und $a \vee b \in U$. Ist U Teilmenge eines vollständigen Verbandes $\mathbf{V}$ und gilt die Bedingung

$$\forall\, T \subseteq U : \quad \bigwedge T \in U \quad \text{und} \quad \bigvee T \in U \tag{2.2}$$

dann heißt **U vollständiger Unterverband** von $\mathbf{V}$. Dabei werden Infima und Suprema natürlich immer in $\mathbf{V}$ gebildet. △

Hilfssatz 2.19. *Sei φ ein Vollendomorphismus eines vollständigen Verbandes $\mathbf{V}$. Dann ist $U := \varphi(V) := \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ (das Bild von φ) ein vollständiger Unterverband von $\mathbf{V}$. Das Bild eines Verbandsendomorphismus ist ein Unterverband.*

Beweis. Es gilt offensichtlich $U \subseteq V$. Zu zeigen ist nun noch die Bedingung (2.2). Für jede Teilmenge $W \subseteq V$ gilt $\varphi(\bigvee W) \in U$. Laut der Homomorphieeigenschaft aus Gleichung (2.1) gilt $\varphi(\bigvee W) = \bigvee \varphi(W)$ und damit auch $\bigvee \varphi(W) \in U$. Zu jeder Teilmenge $T \subseteq U$ lässt sich eine Menge $W_T \subseteq V$ mit $\varphi(W_T) = T$ angeben: $W_T := \{w \in V \mid \exists\, t \in T : \varphi(w) = t\}$. Damit gilt: $\forall\, T \subseteq U : \bigvee T = \bigvee \varphi(W_T) \in U$. Die Argumentation für das Infimum verläuft analog. Der zweite Teil des Hilfssatzes folgt aus dem ersten indem man alle Teilmengen als zweielementig annimmt. ∎

Definition 2.20. Seien A, B und C beliebige Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Abbildungen, so nennen wir

$$g \circ f : A \to C : x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die **Kompositionsabbildung** (kurz **Komposition**) von f und g. △

Hilfssatz 2.21. *Seien* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *und* $\mathbf{W}$ *Verbände bzw. vollständige Verbände und* $f : U \to V$ *sowie* $g : V \to W$ *Verbands- bzw. Vollhomomorphismen, dann ist auch die Kompositionsabbildung* $g \circ f$ *ein Verbands- bzw. Vollhomomorphismus zwischen* $\mathbf{U}$ *und* $\mathbf{W}$.

Beweis. Da f und g Vollhomomorphismen sind, gilt $f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f(S)$ und $g\left(\bigvee T\right) = \bigvee g(T)$ für alle $S \subseteq U$ und $T \subseteq V$. Es folgt nun

$$(g \circ f)\left(\bigvee S\right) = g\left(f\left(\bigvee S\right)\right) = g\left(\bigvee f(S)\right) = \bigvee g(f(S)) = \bigvee (g \circ f)(S)$$

Die Argumentationen für das Infimum und die Verbandshomomorphismen verlaufen analog. ■

Im Allgemeinen werden Homomorphismen nicht nur zwischen Verbänden, sondern zwischen beliebigen Mengen mit Struktur definiert und auch die Komposition solcher Homomorphismen ist wieder homomorph.

2.4 Verträgliche Teilkontexte und abgeschlossene Relationen

Nun sollen Teile von Kontexten genauer untersucht werden. Dabei ist es möglich, Teilmengen der Gegenstände und Merkmale zu betrachten oder Teile der Inzidenzrelation.

2.4.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 2.22 (Definition 44 in [GW])**.** Ist (G, M, I) ein Kontext und sind $H \subseteq G$ und $N \subseteq M$, so wird $(H, N, I \cap H \times N)$ ein **Teilkontext** von (G, M, I) genannt. Abkürzend wird ein Teilkontext auch mit $(H, N, I_{H \times N})$ oder, wenn die Inzidenzrelation aus dem Zusammenhang erschlossen werden kann, nur mit (H, N) bezeichnet.

Eine Relation $J \subseteq I$ wird **Teilrelation** genannt. △

Von besonderem Interesse sind Teilkontexte und Teilrelationen mit weiteren Eigenschaften.

Definition 2.23 (Definition 45 in [GW]). Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines formalen Kontextes (G, M, I) heißt **verträglicher Teilkontext**, wenn für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ gilt, dass $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$ ist. Gilt explizit $\emptyset \neq H \subsetneq G$ oder $\emptyset \neq N \subsetneq M$, so spricht man auch von *nicht trivialen* verträglichen Teilkontexten. △

Laut Hilfssatz 34 in [GW] ist die Abbildung

$$\Pi_{H,N}: \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N): (A, B) \mapsto (A \cap H, B \cap N) \tag{2.3}$$

in den Begriffsverband des verträglichen Teilkontextes automatisch ein surjektiver Vollhomomorphismus. Man nennt dann $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$ auch ein (vollständig) **homomorphes Bild** von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$.

Definition 2.24 (Definition 50 in [GW]). Eine Teilrelation $J \subseteq I$ heißt **abgeschlossene Relation** des Kontextes (G, M, I), wenn jeder Begriff des Kontextes (G, M, J) auch ein Begriff von (G, M, I) ist. △

Hilfssatz 2.25 (Satz 13 in [GW]). *Ist J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I), so ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. Umgekehrt ist für jeden vollständigen Unterverband $\mathbf{U}$ von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ die Relation*

$$J := \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \in U\} \tag{2.4}$$

abgeschlossen und es ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J) = \mathbf{U}$.

Nachdem jetzt diese Teilstrukturen der Kontexte definiert wurden, stellt sich die Frage, ob es effiziente Algorithmen gibt, um alle verträglichen Teilkontexte oder alle abgeschlossenen Relationen eines Kontextes zu bestimmen. Für die abgeschlossenen Relationen (bzw. vollständigen Unterverbände) sind, bis auf Brute-Force-Algorithmen, keine solchen bekannt. Im Gegensatz dazu ist es eher einfach und effizient möglich, die verträglichen Teilkontexte zu bestimmen. Das wird nun beschrieben.

2.4.2 Bestimmung aller verträglichen Teilkontexte und homomorphen Bilder

Die verträglichen Teilkontexte und die surjektiven Vollhomomorphismen spielen im Folgenden eine wichtige Rolle, also wird jetzt darauf eingegangen, wie man sie bestimmen kann. Dazu werden weitere Relationen im Kontext benötigt, die **Pfeilrelationen**.

Definition 2.26 (vgl. Definitionen 25 und 47 in [GW]). Ist (G, M, I) ein Kontext, $g \in G$ und $m \in M$, so definiert man

$$\begin{aligned} g \swarrow m \;&:\Longleftrightarrow\; (\, g \not I m \;\text{ und }\; g' \subsetneq h' \Rightarrow hIm\,) \\ g \nearrow m \;&:\Longleftrightarrow\; (\, g \not I m \;\text{ und }\; m' \subsetneq n' \Rightarrow gIn\,) \\ g \swarrow\!\!\!\nearrow m \;&:\Longleftrightarrow\; (\, g \swarrow m \;\text{ und }\; g \nearrow m\,). \end{aligned}$$

Weiterhin schreibt man $g \swarrow\!\!\!\swarrow m$, falls es $g = g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ und $m_1, m_2, \ldots, m_k = m \in M$ gibt mit $g_i \swarrow m_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $g_j \nearrow m_{j-1}$ für $j \in \{2, \ldots, k\}$. Gilt $g \swarrow\!\!\!\swarrow m$ nicht, so wird $g \not\swarrow\!\!\!\swarrow m$ geschrieben. △

Eine wichtige Eigenschaft von Kontexten und Verbänden ist die doppelte Fundiertheit, sie wird oft als Voraussetzung von Sätzen benötigt. Im endlichen Fall hat sie nur eine geringe Bedeutung, da Hilfssatz 14 a) in [GW] besagt, dass jeder endliche Kontext doppelt fundiert ist.

Definition 2.27 (Definition 26 in [GW]). Ein Kontext (G, M, I) heißt **doppelt fundiert**, wenn es für jeden Gegenstand $g \in G$ und jedes Merkmal $m \in M$ mit $g \not I m$ einen Gegenstand $h \in G$ und ein Merkmal $n \in M$ gibt mit $g \nearrow n$ und $m' \subseteq n'$ sowie $h \swarrow m$ und $g' \subseteq h'$.

Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ heißt doppelt fundiert, falls es zu je zwei Elementen $x < y$ aus V Elemente $s, t \in V$ gibt, so dass s minimal bezüglich $s \leq y$, $s \nleq x$ ist und t maximal bezüglich $x \leq t$, $y \nleq t$ ist. △

Im doppelt fundierten, also speziell im endlichen Fall, lassen sich die verträglichen Teilkontexte sehr einfach an den Pfeilrelationen erkennen.

Definition 2.28 (Definition 46 in [GW]). Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines bereinigten Kontextes (G, M, I) heißt **pfeilabgeschlossen**, falls gilt: aus $h \nearrow m$ und $h \in H$ folgt $m \in N$ und aus $g \swarrow n$ und $n \in N$ folgt $g \in H$. △

Hilfssatz 2.29 (Hilfssatz 36 in [GW]). *Jeder verträgliche Teilkontext eines bereinigten[3] Kontextes ist pfeilabgeschlossen, jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext eines doppelt fundierten und bereinigten Kontextes ist verträglich.*

Es ist recht einfach, alle pfeilabgeschlossenen Teilkontexte eines Kontextes (G, M, I) zu bestimmen. Man betrachtet dazu den gerichteten Graphen mit der Knotenmenge[4]

[3] Es wird bereinigt gefordert, da nur in diesem Fall pfeilabgeschlossen definiert ist.

[4] Die Vereinigung soll alle Elemente von G und M unterscheidbar enthalten, also werden, falls $G \cap M$ nicht leer ist, die Mengen $\dot{G} := G \times \{g\}$ und $\dot{M} := M \times \{m\}$ vereinigt, da diese Mengen auf jeden Fall disjunkt sind. Statt g und m können beliebige unterscheidbare Symbole gewählt werden. Haben die Mengen Indizes, so werden diese meist benutzt: $\dot{H}_t := H_t \times \{t\}$.

$\dot{G} \cup \dot{M}$ und Kanten von g nach m, falls $g \nearrow m$ gilt sowie von m nach g, wenn $g \swarrow m$ gilt. Die Zusammenhangskomponenten[5] dieses Graphen sind die verträglichen Teilkontexte.

Dieses Verfahren ist „per Hand“ gut durchführbar. Ist der Kontext sogar reduziert, dann steht noch der folgende Hilfssatz zur Verfügung, der es ermöglicht, die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte an den Begriffen eines Kontextes abzulesen:

Hilfssatz 2.30 (Hilfassatz 37 in [GW]). *Sei (G, M, I) ein reduzierter doppelt fundierter Kontext. Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) ist genau dann pfeilabgeschlossen, wenn $(G \setminus H, N)$ ein Begriff des Kontextes $(G, M, \not\swarrow\!\!\!\!\nearrow)$ ist.*

Zuvor wurde festgehalten, dass jeder verträgliche Teilkontext auch einen surjektiven Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ und damit ein homomorphes Bild bestimmt. Nun stellt sich die Frage, ob jedem homomorphen Bild auch ein verträglicher Teilkontext zu Grunde liegt, denn dann kann man alle vollständigen homomorphen Bilder ermitteln, indem man alle pfeilabgeschlossenen Teilkontexte bestimmt. Diese Frage wird in [GW, Kapitel 3.2] mit ja beantwortet.

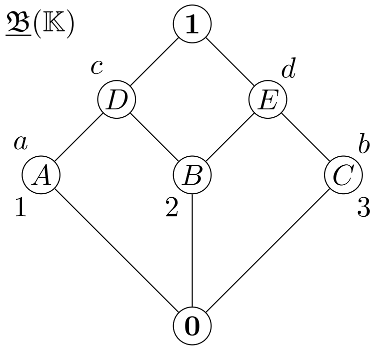
Bemerkt sei noch, dass daraus nicht folgt, dass man mit allen verträglichen Teilkontexten auch (bis auf Isomorphie) alle surjektiven Vollhomomorphismen eines Begriffsverbandes erhält, denn es kann verschiedene Vollhomomorphismen mit dem gleichen homomorphen Bild geben. Das folgende Beispiel veranschaulicht das.

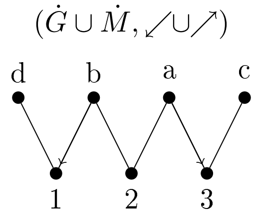
Beispiel 4. Gegeben sei der Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ mit der Gegenstandsmenge $G = \{1, 2, 3\}$ und den Merkmalen $M = \{a, b, c, d\}$. Er ist bereinigt und reduziert. Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ lässt sich daraus aufstellen. Die Begriffe sind $\mathbf{0} = (\emptyset, \{a, b, c, d\}),\ A = (\{1\}, \{a, c\}),\ B = (\{2\}, \{c, d\}),\ C = (\{3\}, \{b, d\}),\ D = (\{1, 2\}, \{c\}),\ E = (\{2, 3\}, \{d\})$ und $\mathbf{1} = (\{1, 2, 3\}, \emptyset)$.[6]

5 Man erhält alle Zusammenhangskomponenten, indem man zu jedem Knoten aus der Knotenmenge alle weiteren Knoten aufschreibt, die über einen Pfad erreichbar sind. Die Vereinigung mehrerer solcher Komponenten ist ebenfalls eine Zusammenhangskomponente und $(\emptyset, \emptyset)$ auch.

6 Wenn Gegenstände und Merkmale gut unterscheidbar sind, werden die Begriffe manchmal auch abkürzend ohne geschweifte Klammern und Kommata geschrieben: $\mathbf{0} = (\emptyset, abcd),\ D = (12, c), \ldots$

$\mathbb{K}$	a	b	c	d
1	$\times$	$\swarrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
3	$\swarrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$

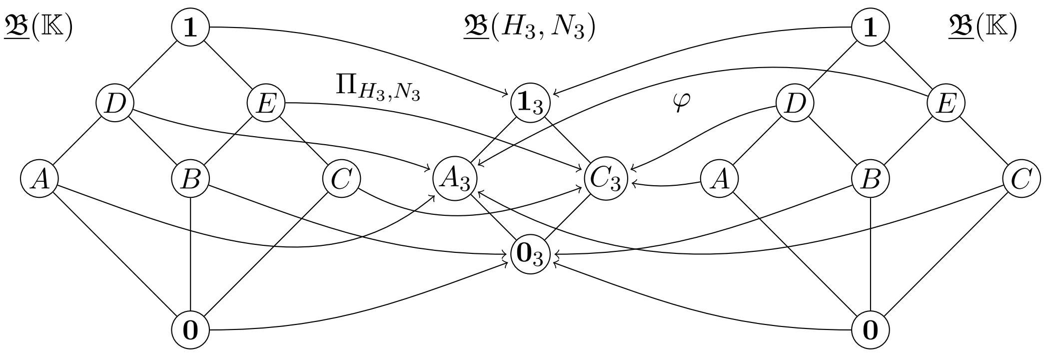




Die verträglichen Teilkontexte sind die Zusammenhangskomponenten des gerichteten Graphen $(\dot{G} \cup \dot{M}, \swarrow \cup \nearrow)$, also

$$\begin{aligned}
&\mathbb{K}_0 := (H_0, N_0) = (\emptyset, \emptyset), && \mathbb{K}_1 := (H_1, N_1) = (\{1\}, \{d\}), \\
&\mathbb{K}_2 := (H_2, N_2) = (\{3\}, \{c\}), && \mathbb{K}_3 := (H_3, N_3) = (\{1, 3\}, \{c, d\}) \quad \text{und} \\
&\mathbb{K}_4 := (H_4, N_4) = (\{1, 2, 3\}, \{a, b, c, d\}) = (G, M).
\end{aligned}$$

Zum verträglichen Teilkontext $\mathbb{K}_3$ erhält man den surjektiven Vollhomomorphismus Π_{H_3,N_3}. Zusätzlich ist noch ein Homomorphismus φ angegeben:



Sowohl Π_{H_3,N_3} als auch φ haben das gleiche Bild, sind aber verschieden voneinander, da beispielsweise $\Pi_{H_3,N_3}(A) = A_3 \neq C_3 = \varphi(A)$ gilt. $\odot$

3 Retrakte und Retraktionen

In diesem Kapitel werden Retraktionen als spezielle Homomorphismen definiert. Da in Definition 2.17 zwei verschiedene Arten von Homomorphismen eingeführt wurden, soll diese Unterscheidung auch auf die Retraktionen angewandt werden. Danach wird angegeben, wie man alle Retraktionen eines Begriffsverbandes bestimmt und wie man Retrakte am Kontext erkennt. Schließlich werden weitere Ergebnisse präsentiert.

Definition 3.1. Eine **Retraktion** ist ein *Verbands*endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ (Idempotenz). Wenn darüber hinaus φ ein *Voll*endomorphismus ist, dann wird φ **Vollretraktion** genannt.

Die Bilder $\varphi(V)$ von Retraktionen bzw. Vollretraktionen werden **Retrakte** bzw. **Vollretrakte** genannt[7]. △

Soll eine Retraktion explizit von einer Vollretraktion unterschieden werden, dann wird sie auch Verbandsretraktion genannt. Retraktionen, die weder gleich der identischen noch einer konstanten Abbildung sind, werden als *nicht triviale* Retraktionen bezeichnet, ihre Bilder sind dann *nicht triviale* Retrakte.

Laut der Definition gilt für eine Retraktion φ mit dem Bild U, dass die Einschränkung von φ auf U gleich der identischen Abbildung auf U ist ($\varphi|_U = \mathrm{id}_U$).

Bemerkung 3.2. Zuvor wurde in der Bemerkung 2.16 auf die eineindeutige Beziehung zwischen doppelt fundiertem Verband und reduziertem Kontext hingewiesen. Damit ist es ebenfalls möglich von Retraktionen von Kontexten zu sprechen, wenn man bedenkt, dass der Begriffsverband des Kontextes gemeint ist.

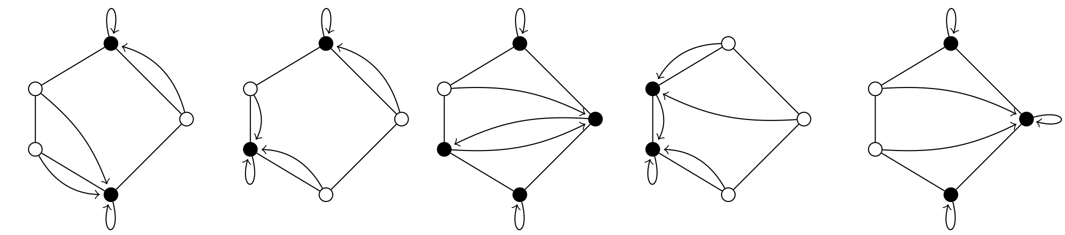
Laut Hilfssatz 2.19 ist jedes Vollretrakt eines vollständigen Verbandes ein vollständiger Unterverband, da es Bild eines speziellen Vollendomorphismus ist. Zusammen mit Hilfssatz 2.25 können dann Vollretrakte als (spezielle) abgeschlossene Relationen des Kontextes gesehen werden.

Die Bilder von Verbandsretraktionen sind Unterverbände. ∗

[7] Es konnte nicht zweifelsfrei festgestellt werden, ob es *der* oder *das* Retrakt heißt. Hier wird in den wenigen Fällen, in denen ein bestimmter Artikel auftritt, die neutrale Form *das Retrakt* benutzt.

Beispiel 5. Es sollen einige Voll- und Verbandsretraktionen des Verbandes N_5 angegeben werden. Im Vergleich dazu werden Abbildungen aufgeführt, die nur die Endomorphie- oder Idempotenzeigenschaft einer Retraktion haben. Die Abbildungen werden durch Pfeile dargestellt, die Bilder der Abbildungen sind die ausgefüllten Kreise im Liniendiagramm.

1: Vollretraktion | 2: (Verbands-) Retraktion | 3: Vollendomorphismus | 4: Verbandsendomorphismus | 5: idempotente Abbildung



Als Erstes sieht man eine Vollretraktion. Ihr Bild ist ein vollständiger Unterverband von N_5. Im zweiten Beispiel wird nicht mehr Null auf Null abgebildet, es handelt sich also nur noch um eine Verbandsretraktion. Die dritte Abbildung ist nicht idempotent, also auch keine Retraktion, sondern nur ein Vollendomorphismus. Auch die vierte Abbildung ist nicht idempotent und zusätzlich nicht **0**-**1**-erhaltend. Ihr Bild ist ein (nicht vollständiger) Unterverband. Zuletzt sieht man eine idempotente Abbildung, die nicht endomorph ist und einen vollständigen Unterverband zum Bild hat. Es kann weder eine Retraktion noch ein Endomorphismus angegeben werden, der diesen Unterverband zum Bild hat.

Eine triviale Vollretraktion ist immer die identische Abbildung. Triviale Verbandsretraktionen sind zusätzlich noch alle konstanten Abbildungen der Form $\varphi(v) = v^*$ für jedes beliebige, feste $v^* \in V$. $\odot$

Bemerkung 3.3. Um die (praktische) Bedeutung und die Eigenschaften der Retraktionen zu verdeutlichen, werden noch drei Analogien zu anderen mathematischen Konstrukten aufgezeigt:

- In der Topologie werden Retraktionen auf ähnliche Weise definiert (vgl. Definition 1.12 in [MT]): Eine (topologische) Retraktion ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ von einem Topologischen Raum X in einen Teilraum $A \subseteq X$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ (also $r|_A = \mathrm{id}_A$, Idempotenz). Wie erwartet ist A dann das Retrakt. Die Stetigkeitseigenschaft entspricht der Forderung nach Homomorphie.
- Retraktionen sind ebenfalls mit Projektionen aus der linearen Algebra vergleichbar. Diese sind als idempotente lineare Abbildungen auf Vektorräumen definiert. Eine

lineare Abbildung ist ein Spezialfall eines Homomorphismus. Man kann also grob sagen, dass Retraktionen Projektionen auf Verbänden sind.

- Retraktionen können auch als Rundungen auf Verbänden verstanden werden. Eine Rundung auf $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $r : \mathbb{R} \to \mathscr{R}$, $\mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $\forall\ x \in \mathscr{R} : r(x) = x$ und $\forall\ x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Longrightarrow r(x) \leq r(y)$. Die erste Eigenschaft sichert die Idempotenz, die Zweite kann mit einer Forderung nach Homomorphie verglichen werden. $\ast$

3.1 Bestimmung aller Vollretraktionen eines Begriffsverbandes

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren hergeleitet, mit dem man alle Vollretraktionen des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ eines reduzierten und doppelt fundierten[8] Kontextes (G, M, I) ermitteln kann. Sollte der Begriffsverband einelementig sein, so gibt es nur eine Retraktion, nämlich die identische Abbildung. Deswegen wird für die folgenden Schritte vorausgesetzt, dass der Begriffsverband mindestens zwei Elemente enthält.

Da Vollretraktionen spezielle Vollhomomorphismen sind, werden zuerst alle homomorphen Bilder des Begriffsverbandes ermittelt. Dazu kann eines der im Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Verfahren verwendet werden. Man erhält alle verträglichen Teilkontexte sowie alle Abbildungen der Form $\Pi_{H,N}$ (siehe Gleichung (2.3)). Die Abbildung auf einen einelementigen Bildverband und der dazugehörige leere verträgliche Teilkontext $(H, N) = (\emptyset, \emptyset)$ wird weggelassen, der Grund dafür zeigt sich gleich noch.

Die Abbildungen $\Pi_{H,N}$ bilden in andere Begriffsverbände ab. Die Eigenschaften Idempotenz und Selbstabbildung sind so nicht erreichbar. Dies sind auch nicht alle möglichen Homomorphismen, aber es gibt keine weiteren homomorphen Bilder, wie am Ende des Abschnitts 2.4.2 festgehalten wurde.

Um die beiden fehlenden Eigenschaften herzustellen, soll eine zweite Abbildung verwendet werden und es steht der Hilfssatz 2.21 zur Verfügung, welcher besagt, dass die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist.

Wenn wir jetzt also weitere Vollhomomorphismen $\Psi : \underline{\mathfrak{B}}(H, N, I_{H\times N}) \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ finden, die die Begriffe der verträglichen Teilkontexte auf die Begriffe des Ausganskontextes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ abbilden, sind wir einen Schritt weiter, denn mit $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ hätten wir Vollendomorphismen. Es fehlt dann nur noch die Idempotenz.

[8] Ein reduzierter und doppelt fundierter Kontext ist nötig, damit Hilfssatz 2.30 zum Ermitteln aller verträglichen Teilkontexte angewendet werden kann. Außerdem ist so die eineindeutige Zuordnung zu einem Begriffsverband gesichert.

Da es einfacher ist, Abbildungen Ψ anzugeben, so dass $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ idempotent ist, wollen wir damit anfangen und dann diejenigen ausschließen, die keine Vollhomomorphismen sind.

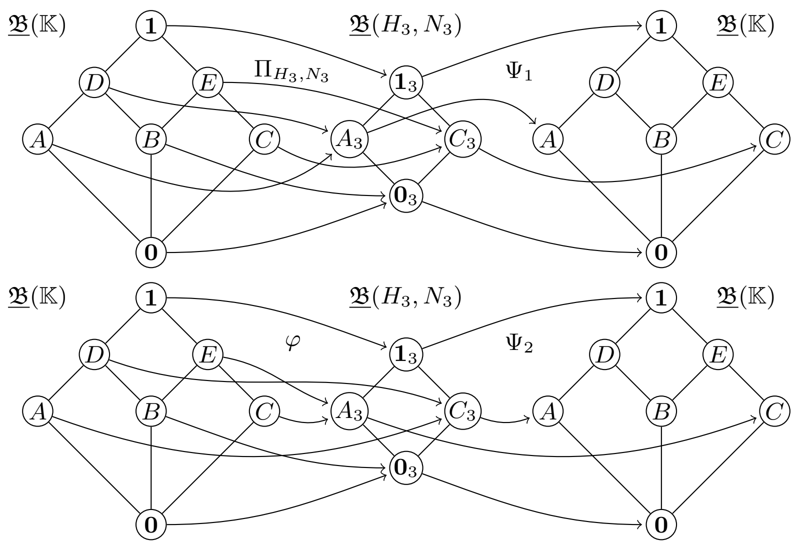
Durch einen Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ wird jeder Begriff (A, B) auf eine Einschränkung von sich selbst abgebildet, nämlich $(A \cap H, B \cap N)$. Dabei können mehrere Begriffe das gleiche Bild haben. Jedes Bild wird nun durch eine Abbildung Ψ auf eines seiner Urbilder abgebildet. Wie in Definition 2.17 angemerkt wurde, muss ein Vollhomomorphismus **0**-**1**-erhaltend sein, was demnach auch für jede Abbildung Ψ gefordert werden soll. Das ist auch der Grund dafür, dass der Vollhomomorphismus $\Pi_{\emptyset,\emptyset}$ auf einen einelementigen Bildverband weggelassen wurde. Es wäre dann nämlich nicht möglich, eine Abbildung aufzustellen, welche dieses eine Element, das gleichzeitig Null und Eins des Verbandes ist, auf zwei verschiedene Elemente abbildet.

Man erhält so auf jeden Fall idempotente Kompositionsabbildungen $\Psi \circ \Pi_{H,N}$. Die Menge $R_{H,N}$ enthalte alle solche Abbildungen Ψ zu einem Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$, also

$$R_{H,N} := \{\Psi \mid \Psi \circ \Pi_{H,N} \text{ ist idempotent}, \Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ und } \Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\}.$$

An dieser Stelle wird auch klar, warum es genügt, nur die Vollhomomorphismen $\Pi_{H,N}$ und nicht alle möglichen Vollhomomorphismen zu betrachten, denn es wird durch Ψ ohnehin jeder Begriff auf ein Urbild abgebildet und danach ist nur noch die Komposition $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ von Interesse.

Beispiel 6. Im Beispiel 4 wurden die beiden verschiedenen Vollhomomorphismen Π_{H_3,N_3} und φ angegeben, die das gleiche Bild haben. Verknüpft mit zwei Abbildungen Ψ_1 und Ψ_2 ergeben sich dann gleiche Kompositionsabbildungen.



Es gilt: $\Psi_1 \circ \Pi_{H_3,N_3} = \Psi_2 \circ \varphi$. $\odot$

Nun müssen noch diejenigen Abbildungen aus $R_{H,N}$ ausgeschlossen werden, die keine Vollhomomorphismen sind. Es stellt sich also die Frage, wie man diese Eigenschaft einfach und ohne großen Aufwand (auch im Hinblick auf Programmierbarkeit) überprüft.

Wie in Bemerkung 3.2 festgestellt wurde, muss das Bild der Komposition $\Psi \circ \Pi_{H,N}$, im Folgenden U genannt, ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ sein, wenn $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ eine Vollretraktion ist. Aus diesem U ließe sich dann mit Gleichung (2.4) aus Hilfssatz 2.25 auch eine abgeschlossene Relation J herleiten. Diese beiden (Unterverband $\mathbf{U}$ und abgeschlossene Relation J) müssen dann jeweils genau so viele Elemente bzw. Begriffe wie der verträgliche Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ enthalten. Mehr sind nicht möglich, da dann Ψ keine Abbildung wäre. Weniger sind nicht möglich, da Ψ jedes Element auf eines seiner Urbilder abbildet und kein Urbild mehr als ein Bild haben kann. Ist das nicht der Fall, dann war Ψ kein Vollhomomorphismus. Alle Abbildungen $\Psi \in R_{H,N}$, die Vollhomomorphismen sind, sollen zu der Menge $R^*_{H,N}$ zusammengefasst werden.

Im nachfolgenden Beispiel 7 wird gezeigt, dass mit der Vorschrift aus Gleichung (2.4) auch dann abgeschlossene Relationen J entstehen können, wenn kein vollständiger Unterverband U zu Grunde lag.

In einem Computerprogramm, das sich mit formaler Begriffsanalyse beschäftigt, wird ein Algorithmus, welcher die Anzahl der Begriffe eines Kontextes ausgibt, schon vorhanden sein, also müssen kaum weitere Anstrengungen unternommen werden, um diesen Test zu programmieren. Soll der Algorithmus nicht vom Computer, sondern „per Hand“ durchgeführt werden, so müssen nicht zwingend Begriffe gezählt werden. Man kann meist schon eher sehen, dass das Infimum oder Supremum von Elementen aus U nicht in U liegt. Dabei sollte man allerdings sehr aufpassen, um auch wirklich jede nichthomomorphe Abbildung Ψ auszuschließen.

In diesem Schritt wurden zu jedem Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ alle Abbildungen aus $R_{H,N}$ betrachtet und diejenigen ausgeschlossen, die keine Vollhomomorphismen sind. Es kann also keine weiteren geben. Man erhält so alle Vollretraktionen als Kompositionsabbildungen $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ für alle $\Psi \in R^*_{H,N}$ und für alle Abbildungen $\Pi_{H,N}$ zu den verträglichen Teilkontexten.

Der Algorithmus wird nun zusammengefasst angegeben.

Algorithmus 1. Bestimmung aller Vollretraktionen eines Begriffsverbandes.

Eingabe: endlicher Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und zugehöriger reduzierter Kontext (G, M, I)

Ausgabe: alle Vollretraktionen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$

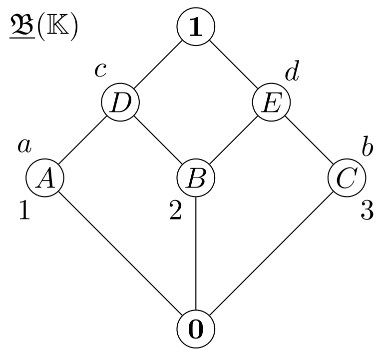
wenn $|\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)| = 1$ dann
 Ausgabe: einzige Vollretraktion ist $\mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)}$
 Stopp
erzeuge die Menge vTk aller verträgl. Teilkontexte (H, N) von (G, M, I) ohne $(\emptyset, \emptyset)$
für alle Elemente (H, N) in vTk führe aus:
 erzeuge die Menge $R_{H,N} := \{\Psi \mid \Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist idempotent und $\mathbf{0}$-$\mathbf{1}$-erhaltend$\}$
 für alle Elemente Ψ in $R_{H,N}$ führe aus:
  erzeuge $J := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \Psi(\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N}))\}$
  wenn $|\mathfrak{B}(G, M, J)| = |\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N})|$ dann
   füge Ψ zu $R^*_{H,N}$ hinzu
 für alle Ψ in $R^*_{H,N}$ führe aus:
  Ausgabe: $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist Vollretraktion

Direkt nach Algorithmus 2 werden die Algorithmen hinsichtlich ihrer Effizienz bewertet und mögliche Verbesserungen besprochen.

3.1.1 Ein ausführliches Beispiel

Beispiel 7. Es sollen alle Vollretraktionen des Begriffsverbandes zum Kontext $\mathbb{K}$ aus Beispiel 4 mit Algorithmus 1 ermittelt werden. Gegeben ist also:

$\mathbb{K}$	a	b	c	d
1	$\times$	$\swarrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow$
2	$\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
3	$\swarrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow$	$\times$



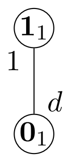
Die verträglichen Teilkontexte wurden bereits bestimmt. Es sind:

$$\mathbb{K}_0 := (H_0, N_0) = (\emptyset, \emptyset), \qquad \mathbb{K}_1 := (H_1, N_1) = (\{1\}, \{d\}),$$
$$\mathbb{K}_2 := (H_2, N_2) = (\{3\}, \{c\}), \qquad \mathbb{K}_3 := (H_3, N_3) = (\{1,3\}, \{c,d\}) \quad \text{und}$$
$$\mathbb{K}_4 := (H_4, N_4) = (\{1,2,3\}, \{a,b,c,d\}) = (G, M).$$

Der Teilkontext $\mathbb{K}_0$ wird weggelassen, wie zuvor begründet wurde. Für $\mathbb{K}_4$ erhält man nur die identische Abbildung als surjektiven Vollhomomorphismus und damit auch als Retraktion, er muss also nicht ausführlich betrachtet werden. Die Kontexte und Begriffsverbände der drei verbleibenden nicht trivialen Teilkontexte sind die Folgenden:

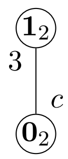
$\mathbb{K}_1$	d
1	

$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$



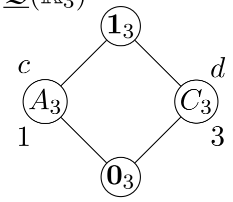
$\mathbb{K}_2$	c
3	

$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$



$\mathbb{K}_3$	c	d
1	×	
3		×

$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_3)$



Jetzt werden die Wertetabellen für die Vollhomomorphismen $\Pi_{H,N}$ angegeben. Die Schreibweise ist etwas unüblich, dient aber der besseren Lesbarkeit. Sie besagt, dass jedes der durch Kommas getrennten Elemente auf das darunter Stehende abgebildet wird.

X	$\mathbf{0}, B, C, E$	$A, D, \mathbf{1}$
$\Pi_{H_1,N_1}(X)$	$\mathbf{0}_1$	$\mathbf{1}_1$

X	$\mathbf{0}, A, B, D$	$C, E, \mathbf{1}$
$\Pi_{H_2,N_2}(X)$	$\mathbf{0}_2$	$\mathbf{1}_2$

X	$\mathbf{0}, B$	A, D	C, E	$\mathbf{1}$
$\Pi_{H_3,N_3}(X)$	$\mathbf{0}_3$	A_3	C_3	$\mathbf{1}_3$

Nun werden die Wertetabellen für alle Abbildungen Ψ_i aus den Mengen $R_{H,N}$ angegeben. Die Indizes i entsprechen denen der Teilkontexte $\mathbb{K}_i$.

X	$\mathbf{0}_1$	$\mathbf{1}_1$
$\Psi_1(X)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

X	$\mathbf{0}_2$	$\mathbf{1}_2$
$\Psi_2(X)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

X	$\mathbf{0}_3$	A_3	C_3	$\mathbf{1}_3$
$\Psi_{3,1}(X)$	$\mathbf{0}$	A	C	$\mathbf{1}$
$\Psi_{3,2}(X)$	$\mathbf{0}$	A	E	$\mathbf{1}$
$\Psi_{3,3}(X)$	$\mathbf{0}$	D	C	$\mathbf{1}$
$\Psi_{3,4}(X)$	$\mathbf{0}$	D	E	$\mathbf{1}$

Im Fall von (H_1, N_1) und (H_2, N_2) gibt es in der Menge $R_{H,N}$ also jeweils nur eine **0**-**1**-erhaltende Abbildung Ψ auf die Urbilder, im Fall (H_3, N_3) gibt es vier davon.

Zu diesen Abbildungen Ψ muss jetzt noch überprüft werden, ob sie Vollhomomorphismen sind. Bei Ψ_1 und Ψ_2 stimmt es offensichtlich. Etwas genauer muss man bei den Abbildungen $\Psi_{3,\cdot}$ hinsehen. Die ersten drei sind Vollhomomorphismen, die Vierte nicht. Zum Beweis sollen exemplarisch die beiden Teilrelationen J_3 und J_4 zu den Bildern $U_3 := \Psi_{3,3}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_3))$ und $U_4 := \Psi_{3,4}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_3))$ betrachtet werden (siehe Gleichung (2.4)). Es ergeben sich diese Kontexte:

J_3	a	b	c	d
1			$\times$	
2			$\times$	
3		$\times$		$\times$

J_4	a	b	c	d
1			$\times$	
2			$\times$	$\times$
3				$\times$

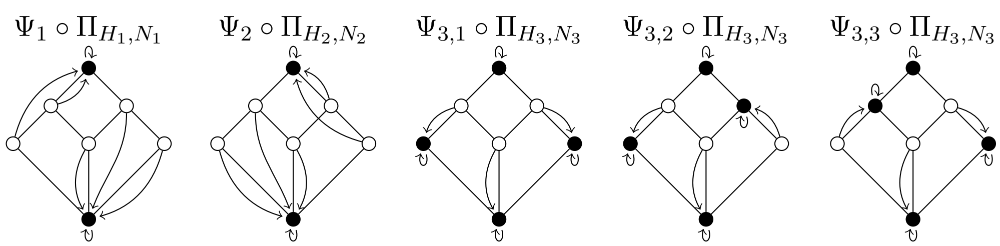
Für J_3 zählt man insgesamt die vier Begriffe $(\emptyset, M)$, $(12, c)$, $(3, bd)$ und $(G, \emptyset)$, bei J_4 sind es fünf: $(\emptyset, M)$, $(12, c)$, $(2, cd)$, $(23, d)$ und $(G, \emptyset)$. Da der zugehörige verträgliche Teilkontext aus vier Begriffen besteht, kann $\Psi_{3,4}$ also kein Homomorphismus sein und fällt weg.

Zu beachten ist, dass sowohl J_3 als auch J_4 abgeschlossene Relationen des Kontextes $\mathbb{K}$ sind, aber $\Psi_{3,4}$ kein Homomorphismus ist. Es würde also nicht ausreichen, nur jeweils zu überprüfen, ob J eine abgeschlossene Relation ist.

Für die Abbildung $\Psi_{3,4}$ wird noch folgendes Gegenbeispiel angegeben (Widerspruch zu Gleichung (2.1)), um auch auf einem anderen Weg die Homomorphieeigenschaft zu widerlegen:

$$\Psi_{3,4}(A_3 \wedge C_3) = \Psi_{3,4}(\mathbf{0}_3) = \mathbf{0} \overset{\lightning}{\neq} B = D \wedge E = \Psi_{3,4}(A_3) \wedge \Psi_{3,4}(C_3)$$

Übrig bleiben insgesamt fünf nicht triviale Vollretraktionen. Die folgenden Abbildungen zeigen sie, dabei bilden jeweils die ausgefüllten Begriffe das Vollretrakt:



Die sechste Retraktion ist, wie anfangs erwähnt, die identische Abbildung und wurde hier nicht extra dargestellt. $\odot$

3.1.2 Implementierung des Algorithmus in conexp-clj

Daniel Borchmann hat Algorithmus 1 in seine Neuimplementierung des Programms Conexp aufgenommen. Man kann sein Programm conexp-clj auf der Projektseite unter http://www.math.tu-dresden.de/~borch/conexp-clj herunterladen.

Hat man einen reduzierten Kontext mit dem Namen `context` abgespeichert, so gibt der Befehl `(pprint-retracts context)` alle Vollretraktionen dieses Kontextes als Wertetabelle aus. Die Anzahl aller Vollretraktionen lässt sich mit dem Befehl `(count (retracts context))` ausgeben.

Die Namen der Befehle sind leider etwas irreführend. Das ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass erst nach der Implementierung die genauen Bezeichnungen festgelegt wurden. Das wird in einer späteren Programmversion hoffentlich berichtigt.

3.2 Vollretrakte am Kontext erkennen

Aus dem in Abschnitt 3.1 vorgestellten Verfahren lässt sich ein Satz herleiten, mit dem es möglich ist, zu einem gegebenen vollständigen Unterverband eines vollständigen Verbandes zu entscheiden, ob dieser ein Vollretrakt ist.

Wegen der in Bemerkung 3.2 erwähnten eineindeutigen Beziehungen zwischen abgeschlossenen Relationen und vollständigen Unterverbänden sowie zwischen reduzierten Kontexten und Begriffsverbänden kann so auch entschieden werden, ob eine abgeschlossene Relation eines Kontextes ein Vollretrakt des zugehörigen Begriffsverbandes bestimmt. Das ist beispielsweise interessant, wenn man sich in der Begriffsanalyse nur mit Kontexten beschäftigen will. Man ist dann nicht gezwungen, Begriffsverbände zu betrachten, kann aber dennoch Aussagen über sie machen.

Satz 3.4. *Sei (G, M, I) ein reduzierter Kontext und $J \subseteq I$ eine abgeschlossene Relation von (G, M, I). Die Menge $\mathfrak{B}(G, M, J)$ ist genau dann ein Vollretrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn es einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H{\times}N)$ von (G, M, I) gibt mit*

$$(I \cap H{\times}N) \subseteq J \quad \textit{und} \quad |\mathfrak{B}(H, N, I \cap H{\times}N)| = |\mathfrak{B}(G, M, J)|.$$

Die Kompositionsabbildung

$$\begin{aligned} \varphi := \iota \circ \Psi \circ \Pi_{H,N} : \mathfrak{B}(G, M, I) &\to \mathfrak{B}(G, M, I) \\ (A, B) &\mapsto ((A \cap H)^{JJ}, (A \cap H)^{J}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\iota\ :\qquad\qquad \mathfrak{B}(G,M,J) &\to \mathfrak{B}(G,M,I) : (A,B) \mapsto (A,B),\\ \Psi : \mathfrak{B}(H,N,I\cap H{\times}N) &\to \mathfrak{B}(G,M,J) : (A,B) \mapsto (A^{JJ},A^{J})\end{aligned}$$

und $\Pi_{H,N}$ wie in Gleichung (2.3) ist dann eine zugehörige Vollretraktion.

Beweis. Wir benutzen ab hier die Abkürzungen $T := I \cap H{\times}N$ und $U := \mathfrak{B}(G,M,J)$.

($\Longleftarrow$) Zuerst wird gezeigt: Wenn es einen verträglichen Teilkontext (H,N,T) von (G,M,I) gibt mit $|\mathfrak{B}(H,N,T)| = |\mathfrak{B}(G,M,J)|$ und $T \subseteq J$, dann ist $\mathfrak{B}(G,M,J)$ ein Vollretrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ und $\varphi = \iota \circ \Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist eine zugehörige Vollretraktion.

Da φ die Menge $\mathfrak{B}(G,M,I)$ auf sich selbst abbildet, ist noch zu zeigen, dass φ zusätzlich ein idempotenter Vollhomomorphismus ist und gerade $\mathfrak{B}(G,M,J)$ zum Bild hat. Die Abbildung $\Pi_{H,N}$ ist ein Vollhomomorphismus[9] und ι offensichtlich auch, denn der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,J)$ ist ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$. Jetzt wird gezeigt, dass Ψ ein Vollisomorphismus sein muss, indem gezeigt wird, dass $\Psi^{-1} := \Pi_{H,N}|_U$ der inverse Vollisomorphismus ist.

Sei $(A,B) \in \mathfrak{B}(H,N,T)$ und laut Voraussetzung $T \subseteq J$. Das Bild $\Psi((A,B)) = (A^{JJ},A^{J})$ ist offensichtlich immer ein Element von $U = \mathfrak{B}(G,M,J)$. Wird dieses Element mit $\Pi_{H,N}|_U$ abgebildet, so erhält man $(A^{JJ}\cap H, A^{J}\cap N) \in \mathfrak{B}(H,N,T)$. Gezeigt wird jetzt $(A^{JJ}\cap H, A^{J}\cap N) = (A,B)$, denn dann ist $\Psi^{-1} = \Pi_{H,N}|_U$. Dabei werden Rechenregeln des Hilfssatzes 2.11 benutzt.

Wir haben

$$\begin{aligned}(\,A \subseteq A^{JJ} \text{ und } A \subseteq H\,) &\implies A \subseteq A^{JJ}\cap H \quad \text{und}\\ (\,B = A^{T} \subseteq A^{J} \text{ und } B \subseteq N\,) &\implies B \subseteq A^{J}\cap N.\end{aligned}$$

Da $(A^{JJ}\cap H, A^{J}\cap N)$ kein Begriff in $\mathfrak{B}(H,N,T)$ mit echt mehr Gegenständen oder Merkmalen als (A,B) sein kann, müssen beide gleich sein.

Um die Injektivität von Ψ zu zeigen, wählen wir zwei beliebige Begriffe $(A,B) \neq (C,D) \in \mathfrak{B}(H,N,T)$ und nehmen an, dass ihre Bilder unter Ψ gleich sind, also kurz $A^{JJ} = C^{JJ}$. Dann wäre auch $A^{JJ}\cap H = C^{JJ}\cap H$ woraus, wie gerade gezeigt, $A = C$ folgt, was im Widerspruch zur Ausgangssituation steht. Zusammen mit der Eigenschaft $|\mathfrak{B}(H,N,T)| = |\mathfrak{B}(G,M,J)|$ folgt die Bijektivität von Ψ.

Jedes Element aus $\mathfrak{B}(G,M,I)$ wird durch $\Pi_{H,N}$ auf ein Element aus $\mathfrak{B}(H,N,T)$ abgebildet. Dieses wird wiederum durch Ψ auf ein Element aus $\mathfrak{B}(G,M,J)$ abgebildet und

[9] Siehe bei Gleichung (2.3) auf Seite 14

danach durch ι wieder auf das gleiche Element. Damit und mit der Surjektivität von $\Pi_{H,N}$ und der Bijektivität von Ψ folgt, dass $\mathfrak{B}(G,M,J)$ das Bild von φ ist.

Es bleibt noch die Idempotenz von φ zu zeigen. Wegen $\Psi^{-1} = \Pi_{H,N}|_U$ und $\Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id}_U$ folgt $\Psi \circ \Pi_{H,N}|_U = \mathrm{id}_U$. Nach Definition gilt auch $\iota|_U = \mathrm{id}_U$. Daraus ergibt sich $\varphi \circ \varphi = \iota \circ \Psi \circ \Pi_{H,N} \circ \varphi = \mathrm{id}_U \circ \mathrm{id}_U \circ \varphi = \varphi$, denn φ bildet nur nach U ab.

($\Longrightarrow$) Sei $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,J)$ ein Vollretrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$. Da in Algorithmus 1 alle Vollretraktionen aus einer Abbildung $\Pi_{H,N}$ zu einem verträglichen Teilkontext (H,N,T) von (G,M,I) und einer weiteren Abbildung Ψ zusammengesetzt wurden, muss es auch Abbildungen $\Pi_{H,N}$ und Ψ geben, so dass $\mathfrak{B}(G,M,J)$ das Bild von $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist. Wir zeigen nun, dass dieser verträgliche Teilkontext (H,N,T) die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Die Abbildung Ψ im Algorithmus war (um die Idempotenz sicherzustellen) so gewählt, dass jeder Begriff $(A,B) \in \mathfrak{B}(H,N,T)$ auf eines seiner Urbilder unter der Abbildung $\Pi_{H,N}$ abgebildet wird. Wenn also $\Psi((A,B)) = (C,D)$ gilt, dann gilt auch $\Pi_{H,N}((C,D)) = (C \cap H, D \cap N) = (A,B)$. Daraus folgt $T \subseteq J$ wegen

$$\begin{aligned} T &= \bigcup\{A \times B \mid (A,B) \in \mathfrak{B}(H,N,T)\} \\ &\subseteq \bigcup\{C \times D \mid (C,D) \in \Psi(\mathfrak{B}(H,N,T))\} \\ &= \bigcup\{C \times D \mid (C,D) \in \mathfrak{B}(G,M,J)\} = J. \end{aligned}$$

Die Bedingung $|\mathfrak{B}(G,M,J)| = |\mathfrak{B}(H,N,T)|$ war gerade die Bedingung, die in Schritt 9 des Algorithmus überprüft wurde. Sie muss also auch hier gelten. ∎

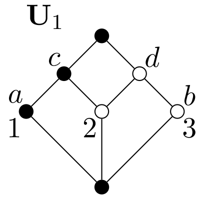
In Algorithmus 1 wurde zu einem surjektiven Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ ein weiterer Vollhomomorphismus Ψ gesucht, so dass ihre Komposition eine Vollretraktion ergibt. Hier hingegen ist mit $\mathfrak{B}(G,M,J)$ ein mögliches Bild einer Retraktion gegeben und es wird nach dazu passenden verträglichen Teilkontexten (und damit Abbildungen $\Pi_{H,N}$) gesucht, so dass eine Vollretraktion aufgeschrieben werden kann.

Beispiel 8. Zu Kontext $\mathbb{K} = (G,M,I)$ und Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ aus Beispiel 4 wird jetzt für einige vollständige Unterverbände und zugehörige abgeschlossene Relationen gezeigt, ob sie Retrakte sind oder nicht.

Da es nur verträgliche Teilkontexte mit zwei oder vier Begriffen gibt, können auch nur Unterverbände mit zwei oder vier Elementen als mögliche Vollretrakte in Frage kommen. Betrachten wir also einige davon. Die ausgefüllten Verbandselemente bilden den vollständigen Unterverband $\mathbf{U}$ und in den zugehörigen Kontexten (G,M,J) wird zusätzlich die

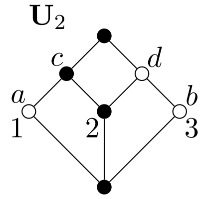
Relation $I \cap H \times N$ eines passenden verträglichen Teilkontextes durch Kreise eingetragen, um sofort zu sehen, ob die Bedingung $(I \cap H \times N) \subseteq J$ gilt.

$\mathbf{U}_1$



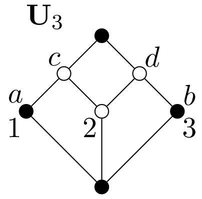
J_1	a	b	c	d
1	$\times$		$\otimes$	
2			$\times$	
3				$\bigcirc$

$\mathbf{U}_2$



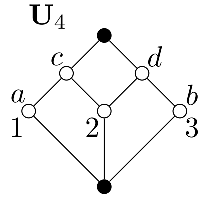
J_2	a	b	c	d
1			$\otimes$	
2			$\times$	$\times$
3				$\bigcirc$

$\mathbf{U}_3$



J_3	a	b	c	d
1	$\times$		$\otimes$	
2				
3		$\times$		$\otimes$

$\mathbf{U}_4$



J_4	a	b	c	d
1				
2				
3				

Man sieht, dass weder $\mathbf{U}_1$ noch $\mathbf{U}_2$ Retrakte sind, denn es fehlt in den zugehörigen abgeschlossenen Relationen jeweils das Kreuz bei $(3, d)$, welches aber zu $I \cap H_3 \times N_3$ gehört. Die Relationen J_3 und J_4 gehören zu Retrakten. Für J_3 ergibt sich die Abbildung Ψ_3 zum verträglichen Teilkontext $(H_3, N_3) = (\{1, 3\}, \{c, d\})$ wie folgt:

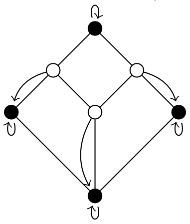
$$\Psi_3((1, c)) = (1^{J_3 J_3}, 1^{J_3}) = (1, ac) \qquad \Psi_3((3, d)) = (3, bd)$$
$$\Psi_3((\emptyset, cd)) = (\emptyset, abcd) \qquad \Psi_3((13, \emptyset)) = (123, \emptyset)$$

Bei J_4 kommen als verträgliche Teilkontexte sowohl $(H_1, N_1) = (\{1\}, \{d\})$ als auch $(H_2, N_2) = (\{3\}, \{c\})$ in Frage. Man erhält also auch jeweils verschiedene Abbildungen $\Psi_{4,1}$ und $\Psi_{4,2}$:

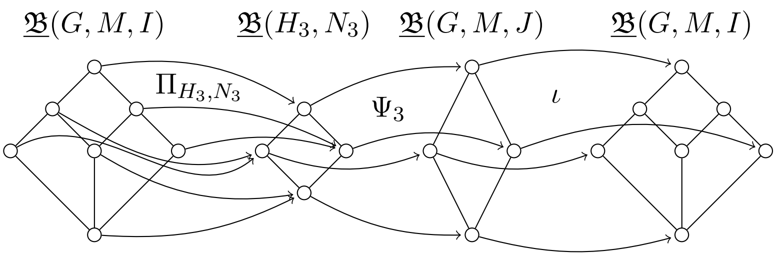
$$\Psi_{4,1}((\emptyset, d)) = (\emptyset, abcd) \qquad \Psi_{4,2}((\emptyset, c)) = (\emptyset, abcd)$$
$$\Psi_{4,1}((1, \emptyset)) = (123, \emptyset) \qquad \Psi_{4,2}((3, \emptyset)) = (123, \emptyset)$$

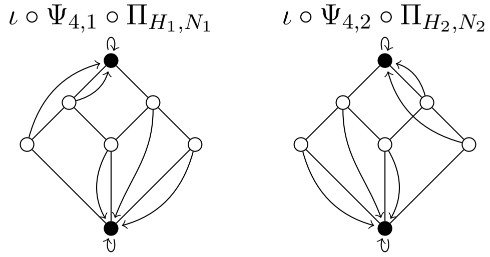
Daraus ergeben sich dann diese Retraktionen, wobei die zu J_3 auch ausführlich mit allen Teilabbildungen aufgeschrieben ist:

$\iota \circ \Psi_3 \circ \Pi_{H_3,N_3}$



entspricht:





$\odot$

Nun wird noch eine alternative Formulierung für die zweite Bedingung des Satzes 3.4 hergeleitet. Dazu wird die folgende Definition benutzt:

Definition 3.5 (vgl. Definition 11 sowie den Absatz nach Hilfssatz 32 in [GW])**.** Eine Menge $S \subseteq V$ heißt **supremum-dicht** in einem vollständigen Verband $\mathbf{V}$, wenn für alle Elemente $v \in V$ gilt $v = \bigvee\{s \in S \mid s \leq v\}$. S heißt **infimum-dicht**, wenn für alle $v \in V$ gilt $v = \bigwedge\{s \in S \mid v \leq s\}$.

Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines Kontextes (G, M, I) heißt **dichter Teilkontext**, wenn $\gamma H := \{\gamma h \mid h \in H\}$ supremum-dicht und dual $\mu M := \{\mu m \mid m \in M\}$ infimum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ sind. $\triangle$

Hilfssatz 3.6 (vgl. Hilfssatz 39 in [GW])**.** *Genau dann ist $(H, N, I \cap H \times N)$ ein dichter Teilkontext in (G, M, I), wenn er auch ein verträglicher Teilkontext ist und die Abbildung $\Pi_{H,N}$ injektiv ist. Insbesondere gilt dann $|\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)| = |\mathfrak{B}(G, M, I)|$.*

Mit diesem Hilfssatz erhalten wir nun eine weitere Formulierung des Satzes 3.4:

Folgerung 3.7. *Die Menge $\mathfrak{B}(G, M, J)$ ist genau dann ein Vollretrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn J eine abgeschlossene Relation des reduzierten Kontextes (G, M, I) ist und es einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) gibt, der dichter Teilkontext von (G, M, J) ist.*

Bemerkung 3.8. Hiermit hat sich auch eine interessante Beziehung zwischen verträglichen Teilkontexten und abgeschlossenen Relationen gezeigt:

Die verträglichen Teilkontexte bestimmen Abbildungen, genauer surjektive Vollhomomorphismen, können aber keine Endomorphismen beschreiben (bis auf die identische Abbildung). Die abgeschlossenen Relationen hingegen sagen gar nichts über Abbildungen aus, sondern nur etwas über vollständige Unterverbände und damit zum Teil über die Bilder von Endomorphismen.

Die Kombination aus abgeschlossener Relation und dicht darin liegendem verträglichen Teilkontext bestimmt dann aber eine Vollretraktion, also einen speziellen Endomorphismus komplett. Die Eigenschaften der beiden Teilstrukturen ergänzen sich also und dabei entstehen noch etwas speziellere Strukturen als man auf den ersten Blick vielleicht erwarten würde. $*$

3.3 Verbandsretraktionen bestimmen und erkennen

Um alle Retraktionen eines Verbandes algorithmisch zu erzeugen oder die Retrakte am zugehörigen Kontext erkennen zu können, kann man die Ergebnisse zu den Vollretrakten nicht sofort verwenden, da diese jeweils die Eigenschaft benutzt haben, dass Vollretrakte vollständige Unterverbände sind und damit abgeschlossene Relationen bestimmen. Verbandsretrakte haben diese Eigenschaft aber im Allgemeinen nicht. Es ist dennoch möglich, eine Verallgemeinerung des Satzes 3.4 anzugeben, womit alle Retrakte eines vollständigen Verbandes erkannt werden können.

Satz 3.9. *Sei $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ der Begriffsverband des reduzierten Kontextes (G, M, I). Ein Unterverband $\mathbf{U} \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist genau dann ein Retrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn es einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H{\times}N)$ von (G, M, I) gibt mit*

$$(I \cap H{\times}N) \subseteq R := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in U\} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{B}(H, N, I \cap H{\times}N)| = |U|.$$

Der Kontext $(H, N, I \cap H{\times}N)$ muss also dichter Teilkontext von (G_U, M_U, R) sein mit $G_U := \bigcup\{A \mid (A, B) \in U\}$ und $M_U := \bigcup\{B \mid (A, B) \in U\}$. Die Kompositionsabbildung

$$\begin{aligned} \varphi := \iota \circ \Psi \circ \Pi_{H,N} : \mathfrak{B}(G, M, I) &\to \mathfrak{B}(G, M, I) \\ (A, B) &\mapsto ((A \cap H)^{RR}, (A \cap H)^{R}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \iota \ : \qquad \mathfrak{B}(G_U, M_U, R) &\to \mathfrak{B}(G, M, I) \qquad : (A, B) \mapsto (A, B), \\ \Psi : \mathfrak{B}(H, N, I \cap H{\times}N) &\to \mathfrak{B}(G_U, M_U, R) : (A, B) \mapsto (A^{RR}, A^{R}) \end{aligned}$$

und $\Pi_{H,N}$ wie in Gleichung (2.3) ist dann eine zugehörige Retraktion.

Beweis. Dieser Beweis verläuft fast genau so wie der Beweis des Satzes 3.4. Die Unterschiede betreffen vor allem den nicht mehr zwingend vollständigen Unterverband $\mathbf{U}$. Es wird wieder die Abkürzung $T := I \cap H{\times}N$ benutzt und es gilt $U = \mathfrak{B}(G_U, M_U, R)$.

In Hilfssatz 3.6 wurde bereits bewiesen, dass (H,N,T) genau dann dicht im Kontext (G_U,M_U,R) ist, wenn $T \subseteq R$ (und damit $H \subseteq G_U$ und $N \subseteq M_U$) und $|\underline{\mathfrak{B}}(H,N,T)| = |U| = |\underline{\mathfrak{B}}(G_U,M_U,R)|$ gelten.

$(\Longleftarrow)$ Zuerst soll wieder gezeigt werden: Wenn es einen verträglichen Teilkontext (H,N,T) von (G,M,I) gibt mit $|\mathfrak{B}(H,N,T)| = |U|$ und $T \subseteq R := \bigcup\{A \times B \mid (A,B) \in U\}$, dann ist U ein Retrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ und $\varphi = \iota \circ \Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist eine zugehörige Retraktion.

Hierzu werden genau die Schritte des Beweises zu Satz 3.4 durchgeführt. Die Abbildung φ ist aber im Allgemeinen keine Vollretraktion, da ι hier kein Vollhomomorphismus, sondern nur ein Verbandshomomorphismus sein muss. Außerdem ist das Bild von φ hier U und nicht $\mathfrak{B}(G,M,J)$.

$(\Longrightarrow)$ Sei $\mathbf{U}$ ein Retrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$. In Algorithmus 2 (welcher gleich noch vorgestellt wird) werden alle Retraktionen aus einer Abbildung $\Pi_{H,N}$ zu einem verträglichen Teilkontext (H,N,T) von (G,M,I) und einer weiteren Abbildung Ψ zusammengesetzt, also muss es auch Abbildungen $\Pi_{H,N}$ und Ψ geben, so dass U das Bild von $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist. Wir zeigen nun, dass dieser verträgliche Teilkontext (H,N,T) die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Die Abbildung Ψ im Algorithmus wird (um die Idempotenz sicherzustellen) so gewählt, dass jeder Begriff $(A,B) \in \mathfrak{B}(H,N,T)$ auf eines seiner Urbilder unter der Abbildung $\Pi_{H,N}$ abgebildet wird. Wenn also $\Psi((A,B)) = (C,D)$ gilt, dann gilt auch $\Pi_{H,N}((C,D)) = (C \cap H, D \cap N) = (A,B)$. Daraus folgt $T \subseteq R$ wegen

$$
\begin{aligned}
T &= \bigcup\{A \times B \mid (A,B) \in \mathfrak{B}(H,N,T)\} \\
&\subseteq \bigcup\{C \times D \mid (C,D) \in \Psi(\mathfrak{B}(H,N,T))\} \\
&= \bigcup\{C \times D \mid (C,D) \in U\} = R
\end{aligned}
$$

Die Bedingung $|U| = |\mathfrak{B}(H,N,T)|$ ist gerade die Bedingung, die in Schritt 11 des Algorithmus überprüft wird. Sie muss also auch hier gelten. ■

Mit Satz 3.4 konnte sowohl entschieden werden, ob ein vollständiger Unterverband eines Begriffsverbandes ein Vollretrakt ist als auch, ob eine abgeschlossene Relation ein Vollretrakt bestimmt. Mit dem hier gerade bewiesenen Satz 3.9 können Verbandsretrakte nur anhand des Unterverbandes oder des Kontextes (G_U,M_U,R) erkannt werden. Anhand der Relation R im Kontext (G,M,R) kann nicht entschieden werden, ob dadurch ein Retrakt bestimmt wird, da dieser Kontext im allgemeinen mehr Begriffe hat als (G_U,M_U,R). Daher ist das Erkennen von Verbandsretrakten am Kontext nicht ganz so elegant durchführbar wie das Erkennen von Vollretrakten.

Ein Algorithmus zum Erzeugen aller Verbandsretraktionen kann prinzipiell wie Algorithmus 1 ablaufen. Da jetzt aber die Komposition $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ nur ein Verbandshomomorphismus sein muss, muss auch Ψ nur ein Verbandshomomorphismus und somit nicht mehr **0**-**1**-erhaltend sein. Um das zu überprüfen, wird ein neues Verfahren benötigt.

Laut Satz 3.9 kann man beispielsweise prüfen, ob $|\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)| = |U|$ gilt. Dazu muss $U = \mathfrak{B}(G_U, M_U, R)$ erst noch bestimmt werden. Ein weiterer Unterschied ist, dass jetzt auch konstante Abbildungen $\Pi_{H,N}$ zulässig sind (dazu gehören leere verträgliche Teilkontexte). Die sich daraus ergebenden konstanten Retraktionen könnten aber auch gesondert ausgegeben werden, da sie trivial sind. Man erhält diesen Algorithmus:

Algorithmus 2. Bestimmung aller Retraktionen eines Begriffsverbandes.

Eingabe: endlicher Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und zugehöriger reduzierter Kontext (G, M, I)

Ausgabe: alle Retraktionen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$

wenn $|\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)| = 1$ dann
    Ausgabe: einzige Retraktion ist $\mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)}$
    Stopp
erzeuge die Menge vTk aller verträglichen Teilkontexte (H, N) von (G, M, I)
für alle Elemente (H, N) in vTk führe aus:
    erzeuge die Menge $R_{H,N} := \{\Psi \mid \Psi \circ \Pi_{H,N} \text{ ist idempotent}\}$
    für alle Elemente Ψ in $R_{H,N}$ führe aus:
        erzeuge $G_U := \bigcup\{A \mid (A, B) \in \Psi(\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N}))\}$
        erzeuge $M_U := \bigcup\{B \mid (A, B) \in \Psi(\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N}))\}$
        erzeuge $R := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \Psi(\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N}))\}$
        wenn $|\mathfrak{B}(G_U, M_U, R)| = |\mathfrak{B}(H, N, I_{H\times N})|$ dann
            füge Ψ zu $R^*_{H,N}$ hinzu
    für alle Ψ in $R^*_{H,N}$ führe aus:
        Ausgabe: $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist Retraktion

Dieser Algorithmus und auch Algorithmus 1 haben das Problem, dass sie alle Abbildungen aus der Menge $R_{H,N}$ durchprobieren müssen. Das ist ineffizient. Besser ist es, wenn man gleich nur vollhomomorphe Abbildungen Ψ erzeugt. Dazu kann man folgendermaßen vorgehen:

Sobald man für zwei Begriffe aus $\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)$ ihre Bilder unter Ψ festgelegt hat, bestimmt man das Supremum und Infimum dieser Bilder. Falls auf diese noch nicht durch Ψ abgebildet wurde, so müssen andere Begriffe aus $\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)$ auf sie abgebildet werden. Ist das nicht möglich, so wird dieser Ansatz für eine Abbildung Ψ verworfen. Ansonsten kann man auch mit diesen Bildern wieder Infima und Suprema bilden und für diese Urbilder finden.

Aber auch dieses Verfahren beruht auf dem Durchprobieren vieler Möglichkeiten und man kann Begriffsverbände angeben, bei denen so nie neue Infima oder Suprema dazu kommen[10], also überhaupt keine Verbesserung erreicht wird. Experimente mit der Kontranominalskala (siehe zur Definition Abschnitt 3.6.4) zeigten, dass sich der Aufwand zwar halbieren könnte, aber da er anscheinend sehr stark exponentiell wächst, wäre das kein großer Gewinn. Zum manuellen Ausführen ist dieses Verfahren aber durchaus gut geeignet, da es einfach zu überschauen ist.

3.4 Weitere Resultate zu Retraktionen und Retrakten

In den vorhergehenden Kapiteln wurde erklärt, wie man Retrakte erzeugt und erkennt. In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften von Retraktionen und Retrakten angegeben werden.

Obwohl die vollständigen Unterverbände eines vollständigen Verbandes ein Hüllensystem bilden, gilt das nicht für die Vollretrakte des Verbandes. Sie bilden auch kein Kernsystem. Man sieht das beispielsweise an den Vollretrakten des Beispiels 7. Schneidet bzw. vereint man die Retrakte, die zu den Retraktionen $\Psi_{3,1} \circ \Pi_{H_3,N_3}$ und $\Psi_{3,2} \circ \Pi_{H_3,N_3}$ gehören, so erhält man eine drei- bzw. eine fünfelementige Menge. Es kann aber kein drei- bzw. fünfelementiges Retrakt geben. Folglich bilden die Verbandsretrakte ebenfalls kein Hüllen- oder Kernsystem.

Die Frage ob, Retrakte von Retrakten wieder Retrakte sind, kann mit ja beantwortet werden. Das würde man so auch erwarten. Der folgende Satz präzisiert das und verallgemeinert es auf Retraktionen:

Satz 3.10. *Sei* $\mathbf{V}$ *ein Verband,* φ_1 *eine Retraktion von* $\mathbf{V}$ *mit* $\varphi_1(V) =: R_1$ *und* φ_2 *eine Retraktion von* R_1 *mit* $\varphi_2(R_1) =: R_2$*. Die Abbildung* $\varphi := \iota \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ *mit* $\iota : R_1 \to V : v \mapsto v$ *ist dann eine Retraktion von* $\mathbf{V}$*.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass φ ein idempotenter Homomorphismus und eine Selbstabbildung ist. Die letzte Eigenschaft folgt direkt aus der Definition. Nach Hilfssatz 2.21 ist

[10] Ein sehr einfaches Beispiel dafür sind die Begriffsverbände der Biordinalskalen. Siehe zur Definition [GW, Seite 43].

φ ein Homomorphismus, da φ_1, φ_2 und ι Homomorphismen sind. Die Idempotenz folgt, weil das Bild von φ nur R_2 ist und diese Menge durch φ_1, φ_2 und ι jeweils nur identisch abgebildet wird. Formal:

$$\begin{aligned} & \varphi_1|_{R_1} = \mathrm{id}_{R_1},\ \varphi_2|_{R_2} = \mathrm{id}_{R_2},\ \iota|_{R_1} = \mathrm{id}_{R_1},\ \varphi(V) = R_2 \subseteq R_1 \\ \Longrightarrow\ & \varphi \circ \varphi = \iota \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_{R_1} \circ \mathrm{id}_{R_2} \circ \mathrm{id}_{R_1} \circ \varphi = \varphi \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Sowohl in den beiden Algorithmen als auch in den Sätzen 3.4 und 3.9 bestehen die Retraktionen immer aus einem surjektiven Vollhomomorphismus und aus einer dazu passenden Abbildung Ψ. Das wird nun nochmal festgehalten.

Folgerung 3.11. *Jede Retraktion eines vollständigen Verbandes kann in der Form $\Psi \circ \Pi$ geschrieben werden, wobei Π ein surjektiver Vollhomomorphismus ist und Ψ dazu passend gewählt wird. Hat ein vollständiger Verband nur triviale surjektive Vollhomomorphismen*[11]*, hat also sein Standardkontext nur triviale verträgliche Teilkontexte, so hat er auch nur triviale Retraktionen.*

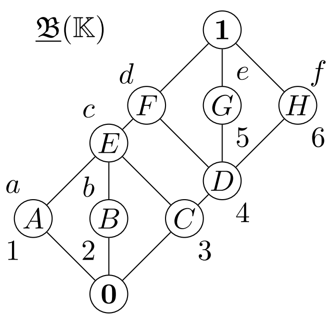
Beweis. Sei φ eine Retraktion eines vollständigen Verbandes $\mathbf{V}$ mit dem Bild U. Dann ist $\Pi : V \to U$ mit $\Pi(v) := \varphi(v)$ ein surjektiver Vollhomomorphismus von $\mathbf{V}$ nach $\mathbf{U}$. Eine dazu passende Abbildung Ψ mit $\Psi \circ \Pi = \varphi$ ist $\Psi : U \to V : v \mapsto v$.

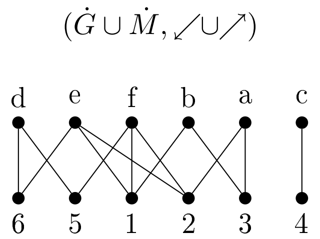
Der zweite Teil folgt direkt aus Algorithmus 2. $\blacksquare$

Darauf aufbauend stellt sich die Frage, ob es zu jedem surjektiven Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ eines Begriffsverbandes auch eine Retraktion dieses Begriffsverbandes gibt. Das ist leider nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 9. Gegeben ist der Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$. Der zugehörige Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und der Graph $(\dot{G} \cup \dot{M}, \swarrow \cup \nearrow)$ sind ebenfalls angegeben. Um nicht triviale Vollretraktionen zu finden, werden grob die Schritte von Algorithmus 1 ausgeführt.

$\mathbb{K}$	a	b	c	d	e	f
1	×	⤢	×	×	⤢	⤢
2	⤢	×	×	×	⤢	⤢
3	⤢	⤢	×	×	×	×
4			⤢	×	×	×
5				⤢	×	⤢
6				⤢	⤢	×

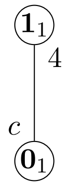




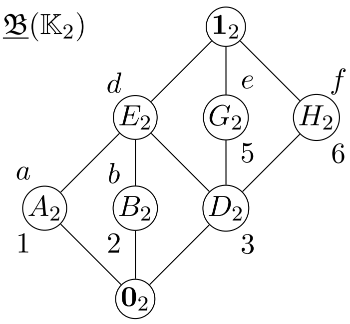
[11] Alle bijektiven und alle konstanten Abbildungen sind triviale surjektive Vollhomomorphismen.

Man sieht schnell, dass dieser Kontext zwei nicht triviale verträgliche Teilkontexte hat, nämlich $\mathbb{K}_1 = (H_1, N_1) = (\{4\}, \{c\})$ und $\mathbb{K}_2 = (H_2, N_2) = (\{1, 2, 3, 5, 6\}, \{a, b, d, e, f\})$. Dazu gehören diese Begriffsverbände:

$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$



$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$



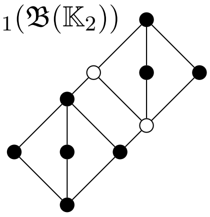
Die Abbildungen $\Pi_{H,N}$ und Ψ ergeben sich wie folgt:

X	$\mathbf{0}, A, B, C, E$	$D, F, G, H, \mathbf{1}$
$\Pi_{H_1,N_1}(X) =: Y$	$\mathbf{0}_1$	$\mathbf{1}_1$
$\Psi_1(Y)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

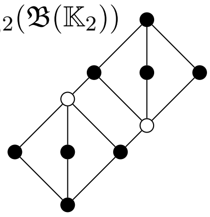
X	$\mathbf{0}$	A	B	C, D	E, F	G	H	$\mathbf{1}$
$\Pi_{H_2,N_2}(X) =: Y$	$\mathbf{0}_2$	A_2	B_2	D_2	E_2	G_2	H_2	$\mathbf{1}_2$
$\Psi_{2,1}(Y)$	$\mathbf{0}$	A	B	C	E	G	H	$\mathbf{1}$
$\Psi_{2,2}(Y)$	$\mathbf{0}$	A	B	C	F	G	H	$\mathbf{1}$
$\Psi_{2,3}(Y)$	$\mathbf{0}$	A	B	D	E	G	H	$\mathbf{1}$
$\Psi_{2,4}(Y)$	$\mathbf{0}$	A	B	D	F	G	H	$\mathbf{1}$

Es gibt also surjektive Vollhomomorphismen $\Pi_{H,N}$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ auf die Verbände der verträglichen Teilkontexte. Aber beim zweiten Teilkontext ist keine der möglichen Abbildungen $\Psi_{2,\cdot}$ ein Homomorphismus. Am einfachsten sieht man das, wenn man die Bilder der Abbildungen $\Psi_{2,\cdot}$ als ausgefüllte Elemente in den Verband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ einträgt. Diese Elemente müssten dann einen vollständigen Unterverband bilden, aber es fehlen jeweils Infima oder Suprema.

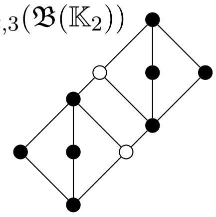
$\Psi_{2,1}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2))$



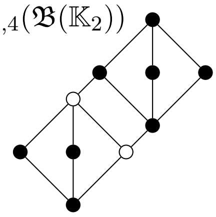
$\Psi_{2,2}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2))$



$\Psi_{2,3}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2))$



$\Psi_{2,4}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2))$



Trägt man die Relationen J zu diesen Bildern in Kontexttabellen ein, so erhält man für $\Psi_{2,2}$ und $\Psi_{2,3}$ den gesamten Kontext $\mathbb{K}$, also mehr Begriffe als im verträglichen Teilkontext $\mathbb{K}_2$. Für die anderen beiden ergeben sich die folgenden Kontexte:

$J_{2,1}$	a	b	c	d	e	f
1	×		×	×		
2		×	×	×		
3			×	×	×	×
4					×	×
5					×	
6						×

$J_{2,4}$	a	b	c	d	e	f
1	×		×	×		
2		×	×	×		
3				×	×	×
4				×	×	×
5					×	
6						×

Diese beiden haben jeweils einen Begriff mehr als $\mathbb{K}_2$, allerdings sieht man das nicht sofort. Die Bedingung des Schrittes 9 aus Algorithmus 1 ist damit für kein $\Psi_{2,\cdot}$ erfüllt. Es gibt also zum verträglichen Teilkontext Π_{H_2,N_2} keine Retraktionen. $\odot$

Dieser Sachverhalt wird im folgenden Satz festgehalten:

Satz 3.12. *Seien* $\mathbf{V}$ *und* $\mathbf{W}$ *Verbände sowie* $\Pi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *ein surjektiver Vollhomomorphismus. Ist* $\mathbf{W}$ *nicht isomorph zu einem Unterverband von* $\mathbf{V}$*, dann gibt es keine Abbildung* Ψ*, so dass* $\Psi \circ \Pi$ *eine Retraktion von* $\mathbf{V}$ *ist.*

Beweis. Dieser Satz gilt, da laut Bemerkung 3.2 ein Retrakt eines Verbandes ein Unterverband sein muss. ■

Daraus folgert man, dass es auch keine Retraktion $\Psi \circ \Pi$ gibt, wenn der Verband $\mathbf{W}$ nicht projektiv[12] und Π nicht bijektiv ist. Der Verband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ aus Beispiel 9 ist nicht projektiv.

Anhand dieser Ergebnisse wird es schwer, Schranken für die Anzahl der Retrakte oder Retraktionen eines Verbandes anzugeben. Die Anzahl der verträglichen Teilkontexte (des Standardkontextes) dient nur bedingt als untere Schranke, da eben nicht zu jedem daraus resultierenden surjektiven Vollhomomorphismus eine Retraktion existieren muss. Als obere Schranke könnte die Anzahl der abgeschlossenen Relationen des Standardkontextes dienen, aber sie beschränkt nur die Anzahl der Vollretrakte (da verschiedene Vollretraktionen das gleiche Bild haben können) und ist außerdem schwer zu ermitteln.

Die Anzahl der verträglichen Teilkontexte ist außerdem nicht der einzige Faktor, der Einfluss auf die Anzahl der Retraktionen hat. Die Elementanzahl des Verbandes spielt

[12] Ein Verband $\mathbf{U}$ heißt genau dann **projektiv**, wenn gilt: Ist $\mathbf{U}$ Unterverband eines surjektiven homomorphen Bildes eines Verbandes $\mathbf{V}$, dann ist $\mathbf{U}$ auch Unterverband von $\mathbf{V}$.

hier auch noch eine wichtige Rolle. Man kann das bei den Ordinal- und Kontranominalskalen im Kapitel 3.6 sehen. Aufgrund des Aufbaus der Algorithmen 1 und 2 erkennt man auch, dass die Struktur der Abbildungen $\Pi_{H,N}$ (Anzahl der Bilder, Anzahl der Urbilder pro Bild) ebenfalls einen nicht zu verachtenden Einfluss hat.

Aufgrund dieser Komplexität ist es leider nicht gelungen, präzisere Aussagen über die Anzahl der Retraktionen eines beliebigen Verbandes zu finden.

Letztendlich bleibt aber festzuhalten, dass Retraktionen im Allgemeinen keine Ausnahmeerscheinungen sind. Ausnahmefälle sind Verbände mit nur trivialen surjektiven Vollhomomorphismen (laut Folgerung 3.11) und Verbände, deren homomorphe Bilder nicht projektiv sind.

3.5 Retraktionen von zusammengesetzten Kontexten und Verbänden

In [GW, Kapitel 1.4] wird beschrieben, wie man aus gegebenen Kontexten neue (größere) Kontexte konstruieren kann. Es wird ebenfalls angegeben, wie die zugehörigen Begriffsverbände aussehen. Das wirft natürlich die Frage auf, ob sich aus gegebenen Retraktionen und Retrakten von Kontexten auch etwas über die Retraktionen der daraus zusammengesetzten Kontexte aussagen lässt. Das ist teilweise der Fall. Die dazu benötigten Definitionen und Sätze werden wie in [GW] für je zwei Kontexte angegeben und lassen sich leicht auf beliebig viele Kontexte verallgemeinern.

Definition 3.13 (Definition 32 in [GW])**.** Die **direkte Summe** zweier Kontexte $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ ist durch[13]

$$\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2 := \big(\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2 \cup (\dot{G}_1 \times \dot{M}_2) \cup (\dot{G}_2 \times \dot{M}_1)\big)$$

definiert. △

Weiterhin liest man dort, dass für die Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \times \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ gilt und (A, B) genau dann ein Begriff von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ ist, wenn $(A \cap \dot{G}_t, B \cap \dot{M}_t)$ ein Begriff von $\dot{\mathbb{K}}_t := (\dot{G}_t, \dot{M}_t, \dot{I}_t)$ ist, für $t \in \{1, 2\}$. Daraus folgt, dass für Begriffe $(A_t, B_t) \in \mathfrak{B}(\dot{\mathbb{K}}_t)$, $t \in \{1, 2\}$, auch $(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ ein Begriff der direkten Summe $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ ist.

Satz 3.14. *Es seien* $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ *und* $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ *reduzierte Kontexte und* $\varphi_t : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) : (A, B) \mapsto (\varphi_t^G(A), \varphi_t^M(B))$ *für* $t \in \{1, 2\}$ *Retraktionen der*

[13] Vergleiche zur Schreibweise die Fußnote 4 auf Seite 15. Für die Inzidenzrelationen gilt dann abweichend $\dot{I}_t := \{((g, t), (m, t)) \mid (g, m) \in I_t\}$ mit $t \in \{1, 2\}$.

zugehörigen Begriffsverbände. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2) &\to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)\\ (A, B) &\mapsto ((\varphi_1^G(A \cap G_1) \cup \varphi_2^G(A \cap G_2)), (\varphi_1^M(B \cap M_1) \cup \varphi_2^M(B \cap M_2)))\end{aligned}$$

eine Retraktion des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)$*.*

Sind $\mathbb{K}_t^* = (G_t^*, M_t^*, I_t^*)$ *mit* $I_t^* := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \varphi_t(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_t))\}$*,* $G_t^* := \bigcup\{A \mid (A, B) \in \varphi_t(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_t))\}$*,* $M_t^* := \bigcup\{B \mid (A, B) \in \varphi_t(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_t))\}$ *die Kontexte der Retrakte*[14] *zu den* φ_t *für* $t \in \{1, 2\}$*, so ist* $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1^* + \mathbb{K}_2^*)$ *das Retrakt zu* φ*.*

Löst man sich von der begriffsanalytischen Formulierung und betrachtet nur noch Verbände, so wird der Satz trivial:

Folgerung 3.15. *Sind* $\varphi_1 : V_1 \to V_1$ *und* $\varphi_2 : V_2 \to V_2$ *Retraktionen, dann ist*

$$\varphi : V_1 \times V_2 \to V_1 \times V_2 : (v_1, v_2) \mapsto (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2))$$

eine Retraktion auf dem direkten Produkt $V_1 \times V_2$ *und hat* $\varphi_1(V_1) \times \varphi_2(V_2)$ *zum Retrakt.*

Beweis des Satzes 3.14. Es wird o.B.d.A. angenommen, dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset = M_1 \cap M_2$ gilt. Wie zuvor erwähnt, ist jeder Begriff von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ als Vereinigung von Begriffen aus $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ schreibbar, also ist φ auch für alle Begriffe aus $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)$ definiert und hat gerade $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1^* + \mathbb{K}_2^*)$ zum Bild, weil auch alle Umfänge und Inhalte aus $\mathbb{K}_1^*$ und $\mathbb{K}_2^*$ vereinigt werden. Es bleibt zu zeigen, dass φ eine Retraktion ist.

Eine Selbstabbildung ist φ per Definition, die Idempotenz folgt mit der Idempotenz der Retraktionen φ_1 und φ_2. Es bleibt zu zeigen, dass φ auch ein Homomorphismus ist. Dazu müsste gezeigt werden, dass $\varphi((A, B)) \wedge \varphi((C, D)) = \varphi((A, B) \wedge (C, D))$ und $\varphi((A, B)) \vee \varphi((C, D)) = \varphi((A, B) \vee (C, D))$ für alle $(A, B), (C, D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)$ gilt. Das kann aber erst noch vereinfacht werden:

Da ein Begriff durch seinen Umfang (also die Menge der Gegenstände) oder seinen Inhalt (also die Merkmale) eindeutig bestimmt ist und sich laut Hauptsatz (Satz 2.13) die Infima der Umfänge sowie die Suprema der Inhalte jeweils als ihr Durchschnitt ergeben, genügt es, $\varphi^G(A) \cap \varphi^G(C) = \varphi^G(A \cap C)$ und $\varphi^M(B) \cap \varphi^M(D) = \varphi^M(B \cap D)$ zu zeigen. Dabei gilt $\varphi((A, B)) =: (\varphi^G(A), \varphi^M(B))$ wie in der Definition der φ_t.

Da man jetzt nur noch mit Mengen rechnet, gelten für $\cap$ und $\cup$ die Distributivgesetze. Außerdem setzen sich die Mengen folgendermaßen zusammen: $G = G_1 \dot\cup G_2$, $A = A_1 \dot\cup A_2$ und $C = C_1 \dot\cup C_2$. Damit ergibt sich die einfache Schreibweise $\varphi^G(X) := \varphi_1^G(X_1) \cup$

[14] In Algorithmus 2 und Satz 3.9 wurden die Kontexte ebenfalls so definiert.

$\varphi_2^G(X_2)$, wobei X ein Begriffsumfang ist. Zur besseren Lesbarkeit wird in den folgenden Umformungen teilweise $\varphi_t^G A_t$ anstatt $\varphi_t^G(A_t)$ geschrieben.

$$\begin{aligned}\varphi^G(A)\cap\varphi^G(C) &= (\varphi_1^G(A_1)\cup\varphi_2^G(A_2))\cap(\varphi_1^G(C_1)\cup\varphi_2^G(C_2)) && (\text{Def. } \varphi^G)\\ &= (\varphi_1^G A_1\cap(\varphi_1^G C_1\cup\varphi_2^G C_2))\cup(\varphi_2^G A_2\cap(\varphi_1^G C_1\cup\varphi_2^G C_2)) && (\text{Distrib.})\\ &= (\varphi_1^G A_1\cap\varphi_1^G C_1)\cup(\varphi_1^G A_1\cap\varphi_2^G C_2)\\ &\qquad\cup(\varphi_2^G A_2\cap\varphi_1^G C_1)\cup(\varphi_2^G A_2\cap\varphi_2^G C_2) && (\text{Distrib.})\end{aligned}$$

Da φ_1 und φ_2 Retraktionen und damit Homomorphismen sind, folgt

$$\varphi_1^G A_1\cap\varphi_1^G C_1=\varphi_1^G(A_1\cap C_1)\quad\text{und}\quad\varphi_2^G A_2\cap\varphi_2^G C_2=\varphi_2^G(A_2\cap C_2).$$

Weiterhin gilt $\varphi_1^G A_1\cap\varphi_2^G C_2=\emptyset=\varphi_2^G A_2\cap\varphi_1^G C_1$, weil φ_1^G und φ_2^G disjunkte Bildmengen haben. Damit formt man weiter um:

$$\begin{aligned}\varphi^G(A)\cap\varphi^G(C) &= \dots\\ &= \varphi_1^G(A_1\cap C_1)\cup\varphi_2^G(A_2\cap C_2)\\ &= \varphi^G((A_1\cap C_1)\cup(A_2\cap C_2)) && (\text{Definition von } \varphi^G)\\ &= \varphi^G((A\cap C\cap G_1)\cup(A\cap C\cap G_2)) && (A_t=A\cap G_t,\ C_t=C\cap G_t)\\ &= \varphi^G(A\cap C) && (G=G_1\,\dot\cup\, G_2)\end{aligned}$$

Die Umformung für $\varphi^M(B)\cap\varphi^M(D)=\varphi^M(B\cap D)$ erfolgt ganz genau so. ■

Wenn φ_1 und φ_2 Vollretraktionen waren, dann ist natürlich auch φ eine Vollretraktion. Wie nicht anders zu erwarten war, ergeben sich so aber im Allgemeinen nicht alle Retraktionen des Begriffsverbandes der direkten Summe.

Beispiel 10. Um den Satz zu veranschaulichen, wird für eine kleine direkte Summe gezeigt, wie aus den Vollretraktionen der Summanden Vollretraktionen der Summe entstehen. Außerdem sollen weitere Vollretraktionen angegeben werden, die so nicht entstehen. Das gibt auch Gelegenheit, nochmal Satz 3.4 anzuwenden. Hier sollen nämlich nicht alle Vollretraktionen mit Algorithmus 1 ermittelt werden, sondern es soll nur nachgewiesen werden, dass die angegebenen Bilder Vollretrakte sind. Die Beschränkung auf Vollretraktionen gründet sich darauf, dass deren Anzahl und Struktur besser überschaubar ist.

Die direkte Summe wird wie folgt gebildet:

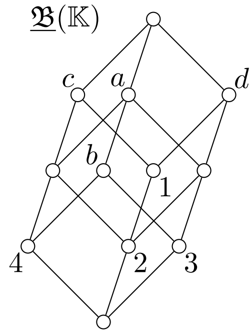
$\mathbb{K}_1$	a	b
1		
2	$\times$	

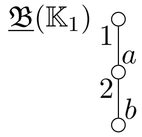
$+$

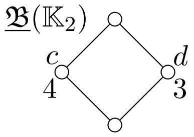
$\mathbb{K}_2$	c	d
3		$\times$
4	$\times$	

$=$

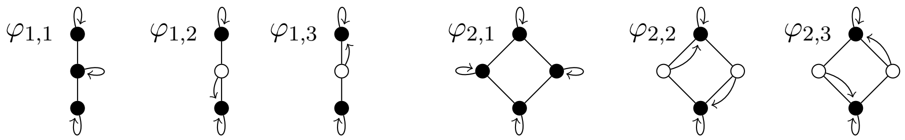
$\mathbb{K}$	a	b	c	d
1	⤢		$\times$	$\times$
2	$\times$	⤢	$\times$	$\times$
3	$\times$	$\times$	⤢	$\times$
4	$\times$	$\times$	$\times$	⤢







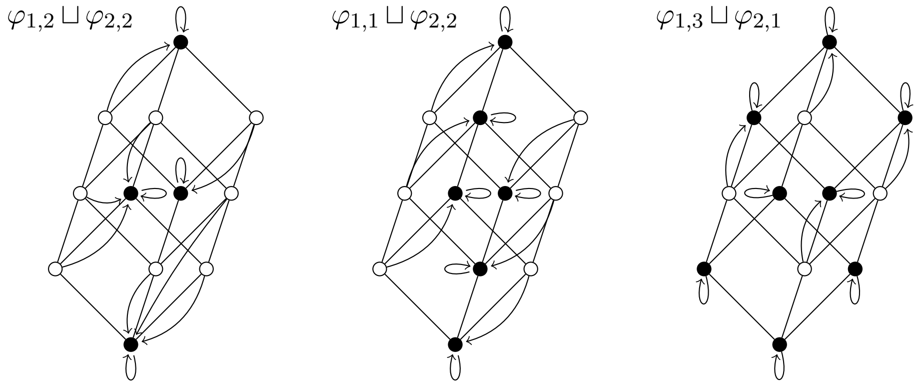
Die Vollretraktionen von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ sind:



X	$(\emptyset, ab)$	$(2, a)$	$(12, \emptyset)$
$\varphi_{1,1}(X)$	$(\emptyset, ab)$	$(2, a)$	$(12, \emptyset)$
$\varphi_{1,2}(X)$	$(\emptyset, ab)$	$(\emptyset, ab)$	$(12, \emptyset)$
$\varphi_{1,3}(X)$	$(\emptyset, ab)$	$(12, \emptyset)$	$(12, \emptyset)$

X	$(\emptyset, cd)$	$(3, d)$	$(4, c)$	$(34, \emptyset)$
$\varphi_{2,1}(X)$	$(\emptyset, cd)$	$(3, d)$	$(4, c)$	$(34, \emptyset)$
$\varphi_{2,2}(X)$	$(\emptyset, cd)$	$(\emptyset, cd)$	$(34, \emptyset)$	$(34, \emptyset)$
$\varphi_{2,3}(X)$	$(\emptyset, cd)$	$(34, \emptyset)$	$(\emptyset, cd)$	$(34, \emptyset)$

Daraus ergeben sich beispielsweise diese Vollretraktionen des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ der direkten Summe:



Für die Retraktionen wird die Schreibweise

$$\varphi_{1,\cdot} \sqcup \varphi_{2,\cdot}(A, B) := \big(\big(\varphi^G_{1,\cdot}(A \cap G_1) \cup \varphi^G_{2,\cdot}(A \cap G_2)\big), \big(\varphi^M_{1,\cdot}(B \cap M_1) \cup \varphi^M_{2,\cdot}(B \cap M_2)\big)\big)$$

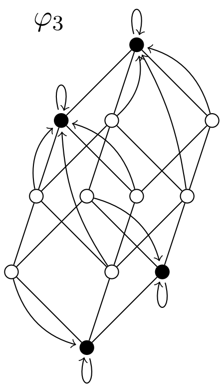
benutzt. Es folgen noch die Abbildungstabellen:

X	$(\emptyset, abcd)$	$(2, acd)$	$(12, cd)$	$(3, abd)$	$(23, ad)$	$(123, d)$
$\varphi_{1,2} \sqcup \varphi_{2,2}(X)$	$(\emptyset, abcd)$	$(\emptyset, abcd)$	$(12, cd)$	$(\emptyset, abcd)$	$(\emptyset, abcd)$	$(12, cd)$
$\varphi_{1,1} \sqcup \varphi_{2,2}(X)$	$(\emptyset, abcd)$	$(2, acd)$	$(12, cd)$	$(\emptyset, abcd)$	$(2, acd)$	$(12, cd)$
$\varphi_{1,3} \sqcup \varphi_{2,1}(X)$	$(\emptyset, abcd)$	$(12, cd)$	$(12, cd)$	$(3, abd)$	$(123, d)$	$(123, d)$

X	$(4, abc)$	$(24, ac)$	$(124, c)$	$(34, ab)$	$(234, a)$	$(1234, \emptyset)$
$\varphi_{1,2} \sqcup \varphi_{2,2}(X)$	$(34, ab)$	$(34, ab)$	$(1234, \emptyset)$	$(34, ab)$	$(34, ab)$	$(1234, \emptyset)$
$\varphi_{1,1} \sqcup \varphi_{2,2}(X)$	$(34, ab)$	$(234, a)$	$(1234, \emptyset)$	$(34, ab)$	$(234, a)$	$(1234, \emptyset)$
$\varphi_{1,3} \sqcup \varphi_{2,1}(X)$	$(4, abc)$	$(124, c)$	$(124, c)$	$(34, ab)$	$(1234, \emptyset)$	$(1234, \emptyset)$

Nun werden noch zwei Vollretraktionen angegeben, die man nicht aus den Vollretraktionen (und ebenfalls nicht aus den Verbandsretraktionen) der Summanden erhält. Um mit Satz 3.4 zu überprüfen, ob es wirklich Vollretrakte sind, ist jeweils der Kontext des Bildes angegeben, der zusätzlich die Relation des passenden verträglichen Teilkontextes (H, N) von $\mathbb{K}$ (durch Kreise gekennzeichnet) enthält.

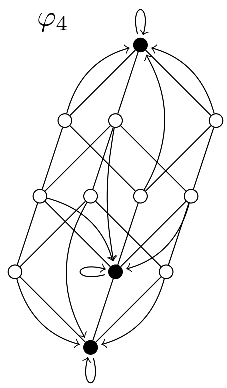
φ_3



$\mathbb{K}_3$	a	b	c	d
1			$\times$	
2			$\otimes$	
3	$\times$	$\otimes$		$\times$
4			$\times$	

$(H, N) = (\{2, 3\}, \{b, c\})$

φ_4



$\mathbb{K}_4$	a	b	c	d
1				
2	$\otimes$		$\times$	$\times$
3				
4				

$(H, N) = (\{1, 2\}, \{a, b\})$

Speziell φ_4 ist interessant, da das zugehörige Vollretrakt dreielementig ist, man aber aus den Vollretraktionen der Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ keine Retraktionen mit dreielementigen Retrakten bilden kann. $\odot$

Eine weitere Möglichkeit der Kontextkonstruktion, welche ebenfalls in [GW, Kapitel 1.4] definiert wird, ist das Halbprodukt. Dabei übertragen sich die Retrakte der Faktoren im Allgemeinen nicht. Ein Grund dafür ist die Struktur des Produktverbandes. Dort treten die Verbände der einzelnen (reduzierten) Faktoren nicht mehr vollständig auf, sondern jeweils ohne ihr Nullelement. Dadurch lassen sich keine Retraktionen der Faktoren übertragen. Ein anderer Grund ist, dass sich die Pfeilrelationen im Halbprodukt stark gegenüber den Faktoren ändern und sich damit auch ganz andere verträgliche

Teilkontexte ergeben. Wenn sich beispielsweise weniger verträgliche Teilkontexte ergeben, verringert sich auch automatisch die Anzahl möglicher Retrakte.

Das direkte Produkt (ebenfalls in [GW] definiert) ist auch eine wichtige Kontextoperation. Hier fehlt allerdings eine Darstellung der Begriffe des Produktkontextes in Abhängigkeit der Begriffe der Faktoren. Dadurch kann man keine Retraktionsabbildungen aufschreiben, wie es bei der direkten Summe der Fall war. Ob es auf andere Weise möglich ist, auf Retrakte des Produktes zu schließen, ist unklar geblieben.

3.6 Retraktionen der Begriffsverbände der Skalen

In diesem Kapitel werden die Begriffsverbände der Skalen auf Retraktionen untersucht. Die Skalen spielen eine entscheidende Rolle beim Überführen von mehrwertigen Kontexten[15] in einwertige Kontexte. Dieses Verfahren wird Skalieren genannt. In [GW, Kapitel 1.3] wird es ausführlich beschrieben.

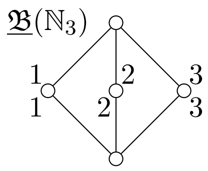
Wie am Ende des Kapitels 3.4 erwähnt, ist es nicht einfach, die Anzahl der Retraktionen zu bestimmen. Das wird sich auch hier bei den Skalen zeigen. Deswegen sind zusätzlich noch die Anzahl der verträglichen Teilkontexte und teilweise auch der Begriffe von Interesse.

Zur Definition der Skalen werden die Abkürzung $\mathbf{n} := \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ und Definition 30 aus [GW] benutzt. Auf die Wiederholung dieser Definition wird hier verzichtet, da für die Skalen jeweils Beispiele angegeben werden und man so sehen kann, was gemeint ist.

3.6.1 Nominalskalen

Nominalskalen sind durch den Kontext $\mathbb{N}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$ definiert.

$\mathbb{N}_3$	1	2	3
1	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$
2	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$
3	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$



Dieser Kontext hat für $n \geq 3$ nur triviale verträgliche Teilkontexte, denn es gilt $g \not\!I m \Longrightarrow g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ und damit ist der Graph $(\dot{G} \cup \dot{M}, \swarrow \cup \nearrow)$ vollständig und hat so nur

[15] Mehrwertige Kontexte (G, M, W, I) bestehen im Gegensatz zu den (einwertigen) Kontexten aus Gegenständen G, (mehrwertigen) Merkmalen M, Merkmalsausprägungen W und einer Relation $I \subseteq G \times M \times W$. $(g, m, w) \in I$ bedeutet dann „der Gegenstand g hat beim Merkmal m den Wert w“.

triviale Zusammenhangskomponenten. Laut Folgerung 3.11 gibt es also beim zugehörigen Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{N}_n)$ auch nur triviale Retraktionen. Das verwundert auch nicht, wenn man bedenkt, dass sich bei den Nominalskalen die Merkmale gegenseitig ausschließen. Es ist also ebenfalls nicht möglich eine „Rundung" der Begriffe anzugeben. Und die Retraktionen konnten ja auch als Rundungen verstanden werden (vgl. Bemerkung 3.3).

3.6.2 Interordinalskalen

Die Interordinalskala ist definiert als der Kontext $\mathbb{I}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \mid (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \geq)$, welcher aber nicht reduziert ist. Durch Weglassen der beiden Vollspalten wird das behoben und wir erhalten den Kontext $\mathbb{I}_n^r$.

$\mathbb{I}_3$	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≥ 1	≥ 2	≥ 3
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow$
2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
3	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

$\mathbb{I}_3^r$	≤ 1	≤ 2	≥ 2	≥ 3
1	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow$
2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
3	$\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$

Die Interordinalskalen besitzen die interessante Eigenschaft, dass sie für $n \geq 3$ immer genau drei nicht triviale verträgliche Teilkontexte haben. Diese sind $(\{1\}, \{\geq 2\})$, $(\{n\}, \{\leq n-1\})$ und deren Vereinigung $(\{1, n\}, \{\leq n-1, \geq 2\})$. Sie haben zwei bzw. vier Begriffe, woraus man mit Satz 3.9 sofort folgert, dass die nicht trivialen Retrakte der Begriffsverbände der Interordinalskalen entweder zwei- oder vierelementig sind.

Es stellt sich noch die Frage, wie viele Retraktionen angegeben werden können. Das soll hier für die Anzahl der Vollretraktionen beantwortet werden. Zu den verträglichen Teilkontexten $(\{1\}, \{\geq 2\})$ und $(\{n\}, \{\leq n-1\})$ gibt es offensichtlich jeweils nur eine Vollretraktion. Bei $(\{1, n\}, \{\leq n-1, \geq 2\})$ sind es $\frac{n^2-n}{2}$. Man sieht das (mit Satz 3.4) wie folgt:

Die abgeschlossenen Relationen J, die mit Gleichung (2.4) (Hilfssatz 2.25) aus den vierelementigen Vollretrakten hergeleitet werden können, müssen jeweils $(1, \leq n-1)$ und $(n, \geq 2)$ enthalten (das sind die „Kreuze" aus dem verträglichen Teilkontext). Außerdem darf solch eine Relation J nur vier Begriffe bestimmen, wobei zwei davon in jedem Fall $(\emptyset, M)$ und $(G, \emptyset)$ sind. Die anderen beiden Begriffe müssen disjunkte Gegenstands- und Merkmalsmengen haben, da sich sonst noch weitere Begriffe ergeben würden. Somit kann dann ein Begriffsumfang die Gegenstände 1 bis k mit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und der andere die Gegenstände von l bis n mit $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ enthalten. Zählt man alle diese

Möglichkeiten, so ergibt sich die Formel

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2},$$

wobei für jede mögliche Wahl des ersten Begriffes die Möglichkeiten für den zweiten Begriff aufsummiert werden. Hier spielt also auch die Anzahl der Begriffe der Interordinalskala eine gewisse Rolle.

In Beispiel 7 wurden alle Vollretraktionen des Begriffsverbandes eines Kontextes angegeben, der isomorph zur Skala $\mathbb{I}_3^r$ ist.

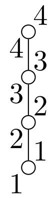
3.6.3 Ordinalskalen

Eine Ordinalskala hat den ebenfalls nicht reduzierten Kontext $\mathbb{O}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$. Um diesen zu reduzieren wird der erste Gegenstand (eine Vollzeile) und das letzte Merkmal (eine Vollspalte) weggelassen und man erhält den Kontext $\mathbb{O}_n^r$.

$\mathbb{O}_4$	1	2	3	4
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$
3		$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
4			$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$

$\mathbb{O}_4^r$	1	2	3
2	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
3		$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$
4			$\swarrow\!\!\!\nearrow$

$\mathfrak{B}(\mathbb{O}_4)$



Die Anzahl der Begriffe der Ordinalskala beträgt n, die der verträglichen Teilkontexte 2^{n-1}. Letzteres wird an den Pfeilrelationen deutlich: Jeder der $n-1$ Doppelpfeile führt zu einer Zusammenhangskomponente im Graphen $(\dot{G}\cup\dot{M}, \swarrow\cup\nearrow)$ und diese lassen sich dann beliebig miteinander kombinieren bzw. vereinigen. Man kann hier von mindestens genau so vielen Retraktionen ausgehen, da die Verbände der verträglichen Teilkontexte jeweils isomorph zu Unterverbänden des Begriffsverbandes der Skala sind, denn es handelt sich bei allen um Ketten. Insbesondere sind also die Voraussetzungen des Satzes 3.12 nicht erfüllt[16].

Diese spezielle Verbandsstruktur führt auch dazu, dass alle Abbildungen der Form $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ Retraktionen bilden, sobald sie idempotent sind. Es muss also nicht überprüft werden, ob Ψ ein Homomorphismus ist (Schritt 11 in Algorithmus 2 könnte beispielsweise wegfallen).

[16]Da Satz 3.12 keine Äquivalenz zeigte, ist das nicht als Beweis, sondern nur als zusätzlicher Hinweis zu sehen.

Die genaue Anzahl der Retraktionen anzugeben stellt ein kompliziertes kombinatorisches Problem dar, welches hier nicht gelöst wurde. Experimentell ist aber die folgende Tabelle entstanden, die zu den ersten Ordinalskalen die Anzahl der verträglichen Teilkontexte und die Anzahl der Vollretraktionen des zugehörigen Begriffsverbandes enthält:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl vertr. Teilkontexte	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Anzahl Vollretraktionen	1	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765

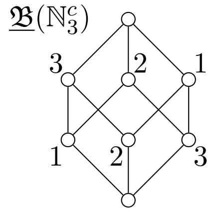
Man sieht, dass ab $n = 5$ schon allein die Anzahl der Vollretraktionen die Anzahl der verträglichen Teilkontexte übersteigt.

Der Kontext $\mathbb{K}_1$ aus Beispiel 10 ist isomorph zur Skala $\mathbb{O}_3^r$. Dort wurden auch alle Vollretraktionen seines Begriffsverbandes angegeben.

3.6.4 Kontranominalskalen

Die Kontranominalskalen sind komplementär zu den Nominalskalen, werden also definiert als $\mathbb{N}_n^c := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \neq)$. Diese Kontexte sind reduziert.

$\mathbb{N}_3^c$	1	2	3
1	⤢	$\times$	$\times$
2	$\times$	⤢	$\times$
3	$\times$	$\times$	⤢

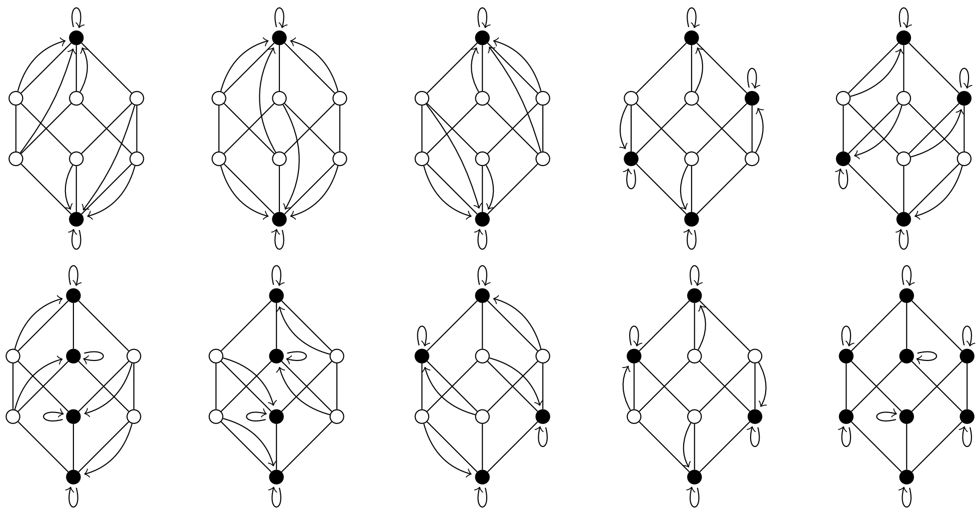


An den Pfeilrelationen erkennt man, ähnlich wie bei den Ordinalskalen, dass die Kontranominalskalen 2^n verträgliche Teilkontexte haben. Ihr Begriffsverband hat allerdings keine so günstige Struktur, dass die Abbildungen der Form $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ schon Retraktionen sind, sobald sie idempotent sind, wie es bei den Ordinalskalen der Fall ist.

Algorithmus 1 zum Bestimmen aller Vollretraktionen scheitert hier schon ab $n = 6$ an extrem langen Laufzeiten. Mit verantwortlich dafür ist neben der großen Anzahl an verträglichen Teilkontexten die ebenfalls sehr große Anzahl an Begriffen (ebenfalls 2^n). Genauer gesagt gibt es keinen Kontext, der bei gleich großer Gegenstands- und Merkmalsmenge mehr verträgliche Teilkontexte oder Begriffe hat. Es folgt wieder eine Tabelle mit den Anzahlen der Vollretraktionen:

n	1	2	3	4	5
Anzahl vertr. Teilkontexte	2	4	8	16	32
Anzahl Vollretraktionen	1	3	10	41	196

Die Retrakte der Kontranominalskalen sind isomorph zu Begriffsverbänden von (kleineren) Kontranominalskalen. Zur Illustration werden alle zehn Vollretraktionen des Begriffsverbandes der Skala $\mathbb{N}_3^c$ angegeben:



3.6.5 Skalieren mit Retrakten von Skalen

Gerade wurden die Retrakte der Skalen untersucht. Diese Retrakte kann man, wie in Bemerkung 3.3 notiert, auch als Rundungen der Skalen ansehen. Es stellt sich daher die Frage, ob man mit diesen „gerundeten Skalen" (genauer: mit deren Kontexten) auch sinnvoll skalieren kann.

Liegt ein mehrwertiger Kontext mit vielen Merkmalen und Merkmalsausprägungen und daher auch vielen und großen Skalen vor, so ist der skalierte Kontext dann extrem groß und unübersichtlich. Auch der Begriffsverband wird dann recht groß sein. Mit Retrakten von Skalen skaliert, erwartet man dann einen kleineren Kontext und ganz besonders einen übersichtlicheren Begriffsverband, der zwar etwas weniger Informationen enthält, aber bei dem wichtige bzw. grobe Informationen erhalten bleiben und keine neuen und insbesondere keine falschen dazu kommen.

Bei Ordinal- und Biordinalskalen[17] ist das möglich, da hier die Retrakte alle möglichen Rundungen beschreiben. Das stellt aber auch gleichzeitig ein gewisses Problem dar, weil nun noch die auf das jeweilige Problem passende Rundung ausgewählt werden muss. Es hat sich gezeigt, dass es dann vermutlich einfacher ist, gleich eine passende aber kleinere Skala aufzustellen.

[17] Biordinalskalen wurden hier nicht eingeführt. Sie verallgemeinern gewissermaßen die Ordinalskalen und führen bezüglich der Retrakte nicht zu neuen Erkenntnissen.

Bei den Interordinalskalen gehen durch das Bilden von Retrakten ziemlich viele Informationen verloren, da die Retrakte sehr klein sind. Das Skalieren damit wird also nicht immer sinnvoll sein. Es kann allerdings erwünscht sein, wenn man durch sehr grobes Skalieren einen ersten Eindruck über die Daten erhalten möchte.

Für die Nominalskalen gibt es, wie zuvor schon erwähnt, überhaupt keine Rundungen in Form von Retrakten.

Es soll auch noch erwähnt werden, dass ein wenig Nacharbeit nötig ist, um die Retrakte der Skalen wieder in Kontexte umzuwandeln, die sich zum Skalieren eignen.

Beispiel 11. Zur Verdeutlichung wird angegeben, wie aus der Interordinalskala $\mathbb{I}_6^r$ eine grobe Skala mittels einer Vollretraktion hergeleitet werden kann. Bei den anderen Skalen kann ähnlich vorgegangen werden.

$\mathbb{I}_6^r$	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 5	≥ 6
1	×	×	×	×	×					
2		×	×	×	×	×				
3			×	×	×	×	×			
4				×	×	×	×	×		
5					×	×	×	×	×	
6						×	×	×	×	×

Als verträglicher Teilkontext wird $(H, N) = (\{1, 6\}, \{\leq 5, \geq 2\})$ gewählt. Man erhält die folgende Abbildung $\Pi_{H,N}$. Dabei werden, um etwas Platz zu sparen, jeweils nur die Umfänge der Begriffe aufgeschrieben. Zusätzlich ist eine Abbildung Ψ angegeben, so dass $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ eine Vollretraktion bildet.

X	$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{2,3,4,5\}$	$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}$	$\{6\}, \{5,6\}, \{4,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
$\Pi_{H,N}(X) =: Y$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1,6\}$
$\Psi(Y)$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$

Das Vollretrakt zur Vollretraktion $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ hat dann den Kontext $\mathbb{K}_v$:

$\mathbb{K}_v$	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 5	≥ 6
1		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					
2		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					
3										
4										
5						$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
6						$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Dieser eignet sich noch nicht besonders gut zum Skalieren, da er nicht kleiner ist als der Ausgangskontext. Deshalb ist eine Bereinigung zweckmäßig und wir erhalten den Kontext $\mathbb{K}_b$. Auch mit diesem lässt sich noch nicht ideal skalieren, denn Gegenstände und Merkmale wurden zusammengefasst. Die Gegenstände sollen wieder getrennt werden. Da sich die Merkmale gegenseitig einschließen, werden nur jeweils die Stärksten übernommen. Die leere Spalte enthält keine Information (sie ist reduzibel), also wird sie weggelassen. Dadurch erhält man den Kontext $\mathbb{K}_s$, der sich nun gut zum Skalieren eignet.

$\mathbb{K}_b$	$\leq 1, \geq 6$	$\leq 2, \leq 3, \leq 4, \leq 5$	$\geq 2, \geq 3, \geq 4, \geq 5$
$1,2$		$\times$	
$3,4$			
$5,6$			$\times$

$\mathbb{K}_s$	≤ 2	≥ 5
1	$\times$	
2	$\times$	
3		
4		
5		$\times$
6		$\times$

Der Kontext $\mathbb{K}_s$ wird auch in [GW, Seite 264] zum groben Skalieren vorgeschlagen und *Schwellenwert-Skala* genannt. $\odot$

4 Schlussbemerkungen und offene Fragen

Mit dieser Arbeit wurden die Grundlagen gelegt, um sich mit Retraktionen von Verbänden und speziell von Begriffsverbänden zu beschäftigen. Die Befürchtung, dass ein Verband im Allgemeinen nur wenige oder gar keine Retraktionen hat, wurde widerlegt. Es hat sich im Gegenteil sogar gezeigt, dass es teilweise sehr viele Retraktionen gibt.

Es stehen jetzt Sätze und Algorithmen zur Verfügung, mit denen es möglich ist, alle Retraktionen eines Verbandes zu ermitteln und zu erkennen, ob Unterverbände Retrakte sind.

Beim Bearbeiten des Themas sind einige Fragen aufgekommen, die nicht beantwortet werden konnten oder sollten. Diese werden jetzt noch formuliert, um Anstöße für weiterführende Forschung zu geben.

- Die Retraktionen wurden prinzipiell für beliebige Verbände definiert. Dann wurden aber nur Begriffsverbände betrachtet, die laut Hauptsatz vollständig sind. Die Ergebnisse sind also nicht auf unendliche nicht vollständige Verbände anwendbar. Das liegt unter anderem daran, dass man nun die surjektiven Vollhomomorphismen nicht mehr über verträgliche Teilkontexte charakterisieren kann. Gibt es dafür andere Möglichkeiten? Welche Rolle spielen Retraktionen nicht vollständiger Verbände?
- Die Bestimmung der Retraktionen mit den Algorithmen 1 und 2 funktioniert zwar und ist einfach, aber sie ist, wie bereits angesprochen, nicht besonders effizient. Hier besteht noch viel Spielraum für Verbesserungen.
- Eventuell kann man Retrakte auch auf ganz anderen Wegen erzeugen. Dabei waren die Bindungen im Gespräch, welche in [GW, Definition 69] eingeführt wurden. In dieser Richtung wurde noch nicht weiter geforscht.
- Ebenfalls wurde Hilfssatz 49 aus [GW] betrachtet. Dieser gibt eine Möglichkeit an, wie abgeschlossene Relationen anhand der Pfeilrelationen ermittelt werden können. In den Experimenten damit ließen sich aber nie Retrakte finden. Ist das immer

so? Falls nicht, dann sollte es auch möglich sein, damit sogar gezielt Retrakte zu bestimmen.

- Das Skalieren mit Retrakten von Skalen wurde im Abschnitt 3.6.5 angesprochen und es stellte sich heraus, dass sich dafür nicht ohne weiteres ein in allen Fällen praktikables Verfahren angeben lässt. Kann man die dort beschriebenen Schritte verbessern oder automatisieren?

- Die Anzahl der Retraktionen wurde mehrmals thematisiert (nach Satz 3.12, im Kapitel 3.6), allerdings gab es kaum konkrete Ergebnisse. Für die weitere Forschung sind bessere Schranken, eventuell auch für bestimmte Klassen von Verbänden oder Kontexten, durchaus interessant, um zu entscheiden, wo die Retrakte eine Sonderrolle einnehmen könnten. Beispielsweise war bei den Interordinalskalen (Abschnitt 3.6.2) die Anzahl der Vollretraktionen und ihre Struktur recht genau bestimmbar, bei den Kontranominalskalen (Abschnitt 3.6.4) dagegen nur sehr vage.

- Beim Bilden von Retraktionen von direkten Summen aus den Retraktionen der Summanden (Satz 3.14) ist ein noch allgemeineres Vorgehen möglich: Es können auch verschiedene Retraktionen der Summanden zu Retraktionen der Summe zusammengesetzt werden. Beispielsweise lässt sich die Retraktion φ_4 aus Beispiel 10 auch als Kombination aus $\varphi_{1,1}$ und zwei mal der konstanten (Verbands-)Retraktion auf das kleinste und einmal auf das größte Element von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ zusammensetzen. Kann man das formalisieren? Ist es möglich, so auch wieder alle Vollretraktionen getrennt von den Verbandsretraktionen zu ermitteln? Letzteres erscheint schwierig, da, wie gerade beschrieben, Vollretraktionen auch teilweise aus Verbandsretraktionen zusammensetzbar sind.

- Am Ende des Abschnittes 3.5 wurde gesagt, dass sich bei den direkten Produkten von Kontexten keine Retraktionsabbildungen aufschreiben lassen. Es ist aber möglich, dass direkte Produkte von Kontexten von Retrakten Retrakte im Produktkontext ergeben. Man kann versuchen, das mit Satz 3.4 (oder allgemeiner mit Satz 3.9) zu beweisen (und würde dann doch noch die Retraktionsabbildungen erhalten). Dazu müssten aber Aussagen über die verträglichen Teilkontexte im direkten Produkt getroffen werden. Es ist nicht klar, ob das möglich ist.

- In Satz 3.12 wurde angegeben, wann es zu einem surjektiven Vollhomomorphismus keine Retraktion gibt. Kann auch eine Bedingung angegeben werden, woraus folgt, dass zu einem surjektiven Vollhomomorphismus auf jeden Fall eine Retraktion existiert?

Literaturverzeichnis

[GW] Bernhard Ganter, Rudolf Wille. Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen. Springer, Heidelberg, 1996.

[GL] George Grätzer. General Lattice Theory, Second edition. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[DP] B. A. Davey, H. A. Priestly. Introduction to Lattices and Order, Second edition. Cambridge University Press, 2002.

[MT] Karl Heinz Mayer. Algebraische Topologie. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989