Thesen

zur Diplomarbeit

Retrakte und Retraktionen von Begriffsverbänden

Felix Kästner, `retraktionen@fpunktk.de`

Technische Universität Dresden, Fachrichtung Mathematik,
Institut für Algebra

Definition 3.1. Eine **Retraktion** ist ein *Verbands*endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ (Idempotenz). Wenn darüber hinaus φ ein *Voll*endomorphismus ist, dann wird φ **Vollretraktion** genannt.
Die Bilder $\varphi(V)$ von Retraktionen bzw. Vollretraktionen werden **Retrakte** bzw. **Vollretrakte** genannt.

- Das Konzept der Retraktionen ist zwar bekannt, aber es konnten keine Hinweise darauf gefunden werden, dass es schon einmal auf Verbände angewendet wurde.
- Alle Retraktionen und alle Vollretraktionen eines Begriffsverbandes sind bestimmbar:

Algorithmus 1. Bestimmung aller Vollretraktionen eines Begriffsverbandes.

Eingabe: endlicher Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und zugehöriger reduzierter Kontext (G, M, I)

Ausgabe: alle Vollretraktionen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$

wenn $|\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)| = 1$ dann
    Ausgabe: einzige Vollretraktion ist $\mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)}$
    Stopp
erzeuge die Menge vTk aller verträglichen Teilkontexte (H, N) von (G, M, I) ohne $(\emptyset, \emptyset)$
für alle Elemente (H, N) in vTk führe aus:
    erzeuge $R_{H,N} := \{\Psi \mid \Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist idempotent und $\mathbf{0}$-$\mathbf{1}$-erhaltend$\}$
    für alle Elemente Ψ in $R_{H,N}$ führe aus:
        erzeuge $J := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \Psi(\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N))\}$
        wenn $|\mathfrak{B}(G, M, J)| = |\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)|$ dann
            füge Ψ zu $R^*_{H,N}$ hinzu
    für alle Ψ in $R^*_{H,N}$ führe aus:
        Ausgabe: $\Psi \circ \Pi_{H,N}$ ist Vollretraktion

- Vollretrakte von Begriffsverbänden sind am Kontext als spezielle abgeschlossene Relationen erkennbar:

  Satz 3.4 (und Folgerung 3.7). *Sei (G, M, I) ein reduzierter Kontext und $J \subseteq I$ eine abgeschlossene Relation von (G, M, I). Die Menge $\mathfrak{B}(G, M, J)$ ist genau dann ein Vollretrakt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn es einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) gibt mit*

  $$(I \cap H \times N) \subseteq J \quad \textit{und} \quad |\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)| = |\mathfrak{B}(G, M, J)|.$$

  Der verträgliche Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ muss also ein dichter Teilkontext von (G, M, J) sein. Die Abbildung

  $$\varphi : \mathfrak{B}(G, M, I) \to \mathfrak{B}(G, M, I) : (A, B) \mapsto ((A \cap H)^{JJ}, (A \cap H)^{J})$$

  ist dann eine zugehörige Vollretraktion.

- Die Kombination aus abgeschlossener Relation und dicht darin liegendem verträglichen Teilkontext bestimmt eine Vollretraktion. Dabei ergänzen sich die Eigenschaften der beiden Teilstrukturen.
- Retraktionen sind im Allgemeinen keine Ausnahmeerscheinungen. Ausnahmefälle davon sind Verbände mit nur trivialen surjektiven Vollhomomorphismen und Verbände, deren homomorphe Bilder nicht projektiv sind.
- Retrakte bilden im Allgemeinen weder Hüllen- noch Kernsysteme.
- Retrakte von Retrakten sind wieder Retrakte:

  Satz 3.10. *Sei $\mathbf{V}$ ein Verband, φ_1 eine Retraktion von $\mathbf{V}$ mit $\varphi_1(V) =: R_1$ und φ_2 eine Retraktion von R_1 mit $\varphi_2(R_1) =: R_2$. Die Abbildung $\varphi := \iota \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ mit $\iota : R_1 \to V : v \mapsto v$ ist dann eine Retraktion von $\mathbf{V}$.*

- Retraktionen lassen sich auf direkte Produkte von Verbänden übertragen und damit auch auf direkte Summen von Kontexten:

  Folgerung 3.15. *Sind $\varphi_1 : V_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : V_2 \to V_2$ Retraktionen, dann ist*

  $$\varphi : V_1 \times V_2 \to V_1 \times V_2 : (v_1, v_2) \mapsto (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2))$$

  eine Retraktion auf dem direkten Produkt $V_1 \times V_2$ und hat $\varphi_1(V_1) \times \varphi_2(V_2)$ zum Retrakt.

- Mit Kontexten aus Retrakten von Skalen kann gröber skaliert werden als mit den Skalen selbst.